

## Taller de Recuperación de Matemáticas 10° - Noviembre 2016

### Razones y Proporciones

1. Un grupo formado por 9 hombres que trabajan todos con igual eficiencia ejecuta una obra trabajando durante 28 días a razón de 6 horas diarias. Determine cuántos días hubieran tenido que trabajar 7 hombres del mismo grupo para realizar la misma obra, trabajando a razón de 8 horas diarias. ¿En cuánto tiempo podrían ejecutar la misma obra dos de los obreros del grupo?
2. Un grupo de 8 obreros, los cuales trabajan todos con la misma eficiencia, ejecuta una cierta obra trabajando durante 20 días. ¿En cuánto tiempo podrían ejecutar la misma obra dos de los obreros del grupo?
3. Una partícula con velocidad constante recorre 1.200 m en 80 segundos. Determine: a. Qué distancia recorrerá en media hora. b. Qué tiempo tardará en recorrer 1.500 m.
4. Para hacer 180 m de una obra, 15 obreros han trabajado 12 días, a razón de 10 horas por día. ¿Cuántos días de 8 horas necesitarán 32 obreros para hacer 600 m de la misma obra?
5. Si 12 obreros se tardan 30 días en acabar una obra, ¿cuántos obreros se necesitarán para acabar la misma obra en 24 días?

### Calculo Porcentual

6. Entre dos locales A y B hay almacenados un total de 2.000 sacos de azúcar. Si del local A se transporta el 20% al local B, entonces en los dos locales habrá el mismo número de sacos. ¿Cuántos sacos había en cada local?
7. Se dispone de dos tipos de acero: el tipo A, que contiene 5% de níquel, y el tipo B, que contiene 40%. Se desea saber qué cantidad de cada tipo será necesario emplear para obtener 70 toneladas de un nuevo tipo de acero que contenga el 30% de níquel.
8. Se han mezclado 40 g de alcohol con cierta cantidad de agua, de tal modo que el alcohol utilizado representa el 20% de la mezcla resultante. Calcule la cantidad de agua que contiene la mezcla.
9. Halle de qué número es 546 el 9% menos.
10. Halle de qué número es 408 el 70% más.

### Potenciación

11. Simplificar:  $\frac{3^{-1} + 2^{-1}}{2^{-1} - 2^{-1}}$

12. Simplificar:  $\left( \frac{a^{-2} + a^{-1} \cdot b^{-1}}{a^{-2} - a^{-1} \cdot b^{-1}} \right)^{-1}$

13. Simplificar:  $\left( \frac{9^n + 27^n}{3^n + 9^n} \right)^{1/n}$

14. Simplificar:  $\frac{2^{n+1}}{(2^n)^{n-1}} \div \frac{4^{n+1}}{(2^{n-1})^{n+1}}$

15. Simplificar:  $\frac{2^x \cdot 4^{x+1}}{3 \cdot 8^x} \cdot \frac{3^{4x}}{16} \cdot \frac{36}{81^x} (2^{2x} + 4^x)^{-3}$

## Radicación

16. Racionalizar:  $\frac{3 + \sqrt{6}}{5\sqrt{3} - 2\sqrt{12} - \sqrt{32} + \sqrt{50}}$

17. Racionalizar:  $\left(\frac{\sqrt{p+q} - \sqrt{p-q}}{\sqrt{p+q} + \sqrt{p-q}}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{p + \sqrt{p^2 - q^2}}{p}\right)^{-1}$

18. Racionalizar:  $\left(\frac{9^{\frac{n+1}{4}} \cdot \sqrt{3 \cdot 3^n}}{3 \cdot \sqrt{3^{-n}}}\right)^{\frac{1}{n}}$

19. Racionalizar:  $\frac{3\sqrt{8} + 5\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$

20. Racionalizar:  $\frac{1}{2 - \sqrt[3]{3}}$

## Ecuaciones I

21. Resolver:  $x + 3y = 8$

$$x + 8y = 18$$

22.  $\sqrt{2}x + 3 = \frac{2x}{3} + 6$

23.  $\frac{x}{4} + 7 = 10x + 5$

24.  $x - 5 = 4(x - 7)$

25.  $5x + 2 = 7x + 3$

## Progresiones Aritméticas

26. La suma de los primeros 15 términos de una progresión aritmética es 360. Halle el primer término y la diferencia común si el término de lugar 15 es 39.

27. Halle la suma de los 10 primeros términos de la progresión aritmética  $-5, -1, 3, 7, \dots$

28. Encuentre una progresión aritmética de siete términos cuyo primer término es  $1/2$  y cuyo último término es  $13/2$ .

29. Si el cuarto término de una progresión aritmética es 14 y el noveno es 34, encuentre el primer término.

30. a sucesión  $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21$  es una progresión aritmética en la cual el primer término es 3 y la diferencia común es 3.

## Progresiones Geométricas

31. Divida el número 195 en tres partes que formen una progresión geométrica cuyo tercer término exceda al primero en 120.
32. Halle la suma de una progresión geométrica en la cual el primer término es 4, el último término es  $\frac{1}{8}$  y la razón común es  $\frac{1}{2}$ .
33. Halle la suma de los 7 primeros términos de la sucesión 5, -10, 20,...
34. Si en una progresión geométrica el octavo término es 32 y el quinto es 4, halle los cuatro primeros términos.
35. Dada una progresión geométrica donde  $r = 3$ ,  $a_1 = 2$ , halle el quinto término.

## Introducción a los Complejos

36. Encuentre los valores de  $x$  e  $y$  para los cuales es válida la siguiente igualdad:  $4 + (x + 2y)i = x + 2i$
37. Encuentre los valores de  $x$  e  $y$  para los cuales es válida la siguiente igualdad:  $2x - y - 16i = 10 + 4yi$
38. Dividir:  $\frac{1+2i}{3+4i}$
39. Efectuar la operación indicada y exprese en la forma estándar:  $(5 - 2i) + (-3 + 6i)$
40. Efectuar la operación indicada y exprese en la forma estándar:  $(7 - 2i) - (-11 - 3i)$

## Productos Notables y Factorización

41. Factorizar:  $2y^4 - 5y^2 - 12$
42. Factorizar:  $x^4 + x^3 - 27x - 27$
43. Factorizar:  $x^3 + 8y^3z^3$
44. Factorizar:  $x^4 + x^2 + 1$
45. Factorizar:  $3x^4 - 5x^2 + 2$

## Polinomios

46. Grafique y encuentre el rango de la función cuadrática:  $y = x^2 + 4x + 4$
47. Grafique y encuentre el rango de la función cuadrática:  $y = -5x^2 + 10x - 8$
48. Grafique y encuentre el rango de la función cuadrática:  $y = 3x^2 + 12x + 13$
49. Grafique y encuentre el rango de la función cuadrática:  $y = x^2 + 1$
50. Grafique y encuentre el rango de la función cuadrática:  $y = 3x^2 + x - 1$

## Polinomios de grado Superior I

51. Hallar los ceros Reales de Polinomio  $P(x) = x^4 - x^3 + 10x^2 - 28x + 18$
52. Halle todas las raíces Racionales, Irracionales y Complejas de la siguiente ecuación:  $2x^5 - 3x^4 - 2x + 3 = 0$
53. Hallar todos los ceros racionales de este polinomio:  $P(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 17x + 6$
54. Usando la división sintética halle el cociente y el residuo de dividir  $2x^4 - 13x^3 + 14x^2 + 15$  entre  $x - 5$
55. Determine si  $x + 1$  es un factor de  $3x^3 - 7x^2 - 8x + 2$

## Polinomios de grado Superior II

56. Halle todas las raíces Racionales, Irracionales y Complejas de la ecuación:  $x^4 + 4x^3 - x^2 - 20x - 20 = 0$
57. Analice para el siguiente polinomio el número de ceros posibles utilizando la regla de los signos de Descartes:  $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x - 3$
58. Encuentre la menor cota positiva y la mayor cota negativa para los ceros reales de  $x^4 - 2x^3 + 4x + 3$
59. Determinar las combinaciones posibles de ceros reales y complejos de  $x^5 + x^3 + 4x^2 + x + 9$
60. Encuentre el polinomio de menor grado que tenga por ceros:  $(2 - 3i)$ ,  $(2 + 3i)$ ,  $-4$  y  $-4$ .

## Fracciones Racionales

61. Simplificar:  $\frac{x^2+5x+6}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

62. Simplificar:  $\frac{9+6x+x^2}{9-x^2}$

63. Simplificar:  $\frac{x^2+5x+6}{x+1} \div \frac{x+3}{x+4}$

64. Multiplicar:  $\frac{3}{x-2} \cdot \frac{x+2}{x^2+1}$

65. Sumar:  $\frac{x}{x+2} + \frac{x^2}{2x^3+1}$

## Descomposición en Fracciones Parciales

66. Descomponer en Fracciones Parciales:  $\frac{5x^2+3x+6}{x^3+3x^2+3x}$

67. Descomponer en Fracciones Parciales:  $\frac{4x^2-5x-15}{x^3-4x^2-5x}$

68. Descomponer en Fracciones Parciales:  $\frac{2x^3+x^2-2x-7}{x^2-x-2}$

69. Descomponer en Fracciones Parciales:  $\frac{x^2-x+1}{(x^2+2x+2)^2}$

70. Descomponer en Fracciones Parciales:  $\frac{x^2+1}{(x+1)(x^3+x+1)}$

## **Función Exponencial**

71. Una cierta raza de conejos fue introducida en una pequeña isla hace 8 años y se estima que la población actual es de 4.100 conejos con una tasa de crecimiento del 55% anual. a. ¿Cuál fue el tamaño inicial de la población de conejos? b. Estime la población dentro de 12 años a partir de ahora. (recuerde:  $m(t) = m_0 e^{kt}$ )
72. Una población que experimenta un crecimiento exponencial aumenta de acuerdo con la fórmula.  $m(t) = m_0 e^{rt}$ , donde  $m(t)$  = población al tiempo  $t$ .  $m_0$  = tamaño inicial de la población.  $r$  = tasa de crecimiento relativo.  $t$  = tiempo. Si en 1995 la población de la Tierra era de 5.700 millones de personas, calcule la población en el año 2035 utilizando una tasa relativa de crecimiento: a. 2% anual. b. 1.6% anual.
73. Determine el monto después de 3 años si se invierten 1.000 dólares a una tasa de interés de 12% anual, continuamente compuesta. ( $c(t) = p e^{rt}$ )
74. Se invierte una suma de 1.000 dólares a una tasa de interés del 12% anual. Determine los montos de la cuenta después de 3 años si el interés se calcula anualmente, semestralmente, trimestralmente, mensualmente y diariamente. ( $c = p(1 + \frac{r}{n})^{nt}$ )
75. Si una cantidad  $P$  de dinero se invierte a 6% de interés compuesto anual, y si se supone que no se realiza ningún retiro, ¿en cuánto tiempo se duplicará el capital?

## **La Función Logarítmica**

76. Escribir como un solo logaritmo:  $3\log x + 2\log(x+2) - \log(x^2 + 4)^2$
77. Halle los valores de  $x$  que satisfacen que  $\log_2 x + \log_2(x + 2) = 3$
78. Evalúe  $\log_4 2 + \log_4 32$
79. Evalúe  $\log_2 80 - \log_2 5$
80. Halle el valor de la variable  $x$  que satisface:  $\log_5(x^2 - 1) - \log(x - 1) - 2 = 0$

## **Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas**

81. Resuelva la ecuación  $4^x - 2^{x+1} = 3$
82. Resuelva para  $x$  la ecuación  $\log_2(\log_3 x) = 4$
83. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:  $2x + y = 4$   
 $\log_2(x + 7) + \log_2(y - 1) = 3$
84. Resuelva para  $x$  la ecuación  $\log(x + 2) + \log(x - 1) = 1$
85. Resuelva para  $x$  la ecuación  $4 + 3\log(2x) = 16$

## **Trigonometría del Triángulo Rectángulo**

86. Un pino gigante proyecta una sombra de 150 m de largo. Determine la altura del árbol si el ángulo de elevación del sol es de  $30^\circ$ .
87. Cuantos giros dará una rueda de un automóvil de 1 m de diámetro al recorrer una distancia de 100 m.
88. Si  $\cos\theta = 3/4$ , dibuje un triángulo rectángulo con un ángulo  $\theta$ , y determine las otras cinco razones trigonométricas de  $\theta$ .
89. Demuestre que en todo triángulo rectángulo, dado un ángulo  $\theta$ , siempre se cumple que  $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$ .
90. Demuestre que en todo triángulo rectángulo, dado un ángulo agudo  $\theta$ , siempre se cumple que  $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ .

## Factorización

91. Factorizar:  $3m^2 - 6mn + 4m - 8n$
92. Factorizar:  $4a^2x^2 - 12ax + 9$
93. Factorizar:  $9a^2x^2 - 39ax + 30$
94. Factorizar:  $27 + 64x^6$
95. Factorizar:  $2am + n - 1 - 2an + 2a - m$

## Distancia entre dos puntos

96. Dados los puntos M(-1, -1) y S(2, 3) establecer la distancia entre ellos y las coordenadas del punto medio
97. Si un barco X está ubicado en el océano en el punto de coordenadas (-8, 10) y la embarcación Y está ubicada sobre el punto de coordenadas (6, -5), calcular la distancia que los separa y el punto medio del segmento que los une.
98. Demostrar que los puntos A(-2, 3), B(5, 3), C(-2, -3) corresponden a los vértices de un triángulo rectángulo.
99. Luisa, David, Sara y Juan juegan al tiro al blanco. El blanco se encuentra en el punto P(2,2). Los resultados obtenidos fueron los siguientes: Luisa da en el punto A(1, 9/2); David en el punto B(-9/2, 1/2); Sara en el punto C(4, 5/2) y Juan en el punto D(5, 7/2) Calcular la distancia a la que quedó cada persona del blanco e indicar cuál de ellas se alejó más del blanco.
100. Determinar la longitud de las medianas de un triángulo cuyos vértices corresponden a los puntos A(0, 0), B(4, 0) y C(3, 2). (recordar que las medianas son los segmentos trazados desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto).

## Medidas de Tendencia Central

101. Las calificaciones de 40 alumnos en Matemáticas han sido las siguientes:

5, 2, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 2, 5, 5, 4, 5, 4, 1, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 4, 2, 3, 4, 3, 4, 3, 5, 3, 5, 3, 1, 4, 3, 3, 5, 5, 3, 4.

- A. Ordene los datos en una tabla de frecuencias.
- B. Halle la moda, la mediana y la media aritmética.
- C. Realizar los diagramas de Barras y Circular

102. El número de estrellas de los hoteles de una ciudad viene dado por la siguiente serie:

3, 3, 4, 3, 4, 3, 1, 3, 4, 3, 3, 3, 2, 1, 3, 3, 3, 2, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 1, 3, 4.

- A. Ordene los datos en una tabla de frecuencia.
- B. Halle la moda, la mediana y la media aritmética.
- C. Realizar los diagramas de Barras y Circular

103. Las puntuaciones obtenidas por un grupo de en una prueba han sido:

15, 20, 15, 18, 22, 13, 13, 16, 15, 19, 18, 15, 16, 20, 16, 15, 18, 16, 14, 13, 17, 18, 15, 20, 21, 15, 12, 13, 18, 19.

- A. Ordene los datos en una tabla de frecuencia.
- B. Halle la moda, la mediana y la media aritmética.
- C. Realizar los diagramas de Barras y Circular

104. Se quiere saber el número de hijos por matrimonio de una villa. Para este propósito, se elige una muestra representativa de 60 matrimonios de ella. Se obtienen los siguientes datos:

2, 2, 4, 1, 3, 5, 3, 2, 1, 6, 3, 4, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 7, 4, 2, 3, 0, 5, 1, 4, 3, 2, 4, 1, 5, 2, 1, 2, 4, 0, 3, 3, 2, 6, 1, 5, 4, 2, 0, 3, 2, 4, 3, 1, 3, 5, 7, 2, 1, 4, 5, 3, 4, 2.

A. Ordene los datos en una tabla de frecuencia.

B. Halle la moda, la mediana y la media aritmética.

C. Realizar los diagramas de Barras y Circular

105. En la clase de Educación Física, el profesor toma los datos de 50 alumnos sobre la estatura de cada uno de los estudiantes,

1.50 1.58 1.60 1.52 1.58 1.48 1.65 1.70 1.62 1.65 1.63 1.58 1.51 1.59 1.49 1.53 1.57 1.73 1.76 1.70 1.49 1.70 1.58  
1.51 1.68 1.62 1.53 1.73 1.59 1.50 1.66 1.47 1.63 1.58 1.54 1.71 1.79 1.56 1.64 1.57 1.48 1.55 1.70 1.72 1.80 1.69  
1.68 1.56 1.75 1.59

A. Ordene los datos en una tabla de frecuencia.

B. Halle la moda, la mediana y la media aritmética.

C. Realizar los diagramas de Barras y Circular

## Ecuaciones II

106. La diferencia entre el cuadrado del consecutivo de un número y el doble del cuadrado del mismo número es igual, al doble del anterior del número, disminuido en 1 unidad. Halla el número, el siguiente y el anterior.

107. Una pieza rectangular es 4 cm más larga que ancha. Con ella se construye una caja de  $840 \text{ cm}^3$  cortando un cuadrado de 6 cm de lado en cada esquina y doblando los bordes. Halla las dimensiones de la caja.

108. Dos estantes contienen en total 40 libros. Al traspasar 5 libros de un estante a otro, resulta que uno queda con el triple del otro. ¿Cuántos libros había originalmente en cada estante?

109. La suma de las dos cifras de un número es 8. Si al número se le añaden 18, el número resultante está formado por las mismas cifras en orden inverso. Halla el número.

110. Guisao tiene la cuarta parte de la edad de su padre Andrés y el triple de la edad de su hermano David. ¿Qué edad tiene cada uno, si sus edades suman 48 años?

## Ángulos

111. Un péndulo barre un ángulo de  $10^\circ$ . Si el arco que describe es de  $\pi/2$  cm. Cual es la longitud del péndulo?

112. Un objeto viaja sobre un círculo de 5 cm de radio, barre un ángulo central de  $1/3$  de radianes en 20 segundos, su velocidad lineal será?

113. Para estimar la velocidad de un río se introduce una rueda de paleta de 4 pies de radio en el agua. Si la corriente hace que la rueda gire a una velocidad de 10 revoluciones por minuto. Cual será la velocidad de la corriente. (en millas por hora).

114. La rueda de un vehículo tiene un diámetro de 90 cm. ¿Cuántas vueltas da aproximadamente por minuto cuando viaja a 120 km/h?

115. Un barrido del minuterero de un reloj de 10 a.m. a 11:05 a.m. corresponde a un ángulo cuya medida en radianes es de:

## Razones Trigonómicas

116. Conocemos la distancia de nuestra casa a la iglesia, 137 m; la distancia de nuestra casa al depósito de agua, 211 m, y el ángulo,  $43^\circ$ , bajo el cual se ve desde nuestra casa el segmento cuyos extremos son la iglesia y el depósito. ¿Cuál es la distancia que hay de la iglesia al depósito de agua?
117. Desde la torre de control de un aeropuerto se establece comunicación con un avión que va a aterrizar. En ese momento, el avión se encuentra a una altura de 1 200 metros y el ángulo de observación desde la torre (ángulo que forma la visual hacia el avión con la horizontal) es de  $30^\circ$ . ¿A qué distancia está el avión del pie de la torre si esta mide 40 m de altura?
118. Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de  $50^\circ$ . ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?
119. Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de  $50^\circ$ . ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?
120. Desde un punto se observa un edificio cuya parte más alta forma con el suelo un ángulo de  $30^\circ$ , si avanzamos 30 metros, el ángulo pasa a ser de  $45^\circ$ . Calcular la altura del edificio.

## Ecuación de la Línea Recta

121. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, -3) y es paralela a la recta que pasa por los puntos (3, 2) y (-5, 4)
122. Escribe la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta  $y = 3x - 5$ , y pasa por el punto (0, 3)
123. Determine el valor de k en la ecuación  $3x + ky + 5 = 0$  para que sea paralela a la recta representada por la ecuación  $3y + x + 3 = 0$
124. Escribe ecuaciones para los lados de un cuadrado con vértices en P(1, 4), Q(4, -1), R(-1, -4) y S(-4, -1)
125. Hallar la ecuación de la recta perpendicular a  $y = \frac{10 - 5x}{2}$  y que pasa por el punto  $(1, \frac{5}{2})$

## Técnicas de Conteo

126. Cinco caminos unen a Ciudad Alegría con el Pueblo Malhumorado. Empezando en ciudad alegría, ¿de cuántas maneras diferentes puede manejar Sergio al Pueblo Malhumorado y volver, esto es, cuántos viajes redondos distintos puede hacer? ¿Cuántos viajes redondos distintos puede hacer si desea regresar por un camino diferente que el que lo llevó al Pueblo Malhumorado?
127. Supóngase que un club esta conformado por 3 mujeres y dos hombres. ¿De cuántas maneras pueden ser elegidos un presidente y un vicepresidente si:
- El presidente es una mujer y el secretario un hombre
  - El presidente es un hombre y el secretario una mujer. El presidente y el secretario deben ser de sexo opuesto?
128. Un consejo de estudiantes de un colegio de bachillerato, tiene un representante de cada grado. Si cada uno de los miembros del consejo está en capacidad de ocupar cualquier cargo,
- ¿de cuántas formas se pueden seleccionar presidente y secretario del consejo?
  - ¿de cuántas formas se pueden seleccionar presidente, vicepresidente y secretario?
  - si se sabe que el presidente debe ser de grado décimo o de grado undécimo, ¿de cuántas formas se pueden seleccionar presidente, vicepresidente y secretario?

129. Si una prueba de selección múltiple consta de 8 preguntas, cada una con 4 posibles respuestas, de las cuales solo 1 es correcta,
- ¿En cuántas formas diferentes puede un estudiante escoger una respuesta para cada pregunta?
  - ¿En cuántas formas puede un estudiante escoger una alternativa para cada pregunta y tener todas las respuestas incorrectas?
130. Tres matrimonios compraron 6 lugares para un concierto. ¿En cuántas formas diferentes pueden sentarse
- Sin restricciones?
  - Si todos los hombres se sientan juntos a la derecha de todas las mujeres?

### Medidas de Dispersión

131. Calcular todas las medidas de dispersión para los datos de la siguiente distribución

x	100	200	300	800
n	90	140	150	120

132. . La siguiente tabla muestra los coeficientes de inteligencia de 480 niños de una escuela elemental.

C.I.	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	110	114	118	122	126
n <sub>i</sub>	4	9	16	28	45	66	85	72	54	38	27	18	11	5	2

Calcular las medidas de Dispersión.

133. Calcular todas las medidas de dispersión para la siguiente distribución

X <sub>i</sub>	5	10	15	20	25
n <sub>i</sub>	3	7	5	3	2

134. Calcular las medidas de Dispersión para las edades de ambos grupos y explicar

A: 20, 15, 10, 11, 20, 41, 33, 24, 17, 15

B: 33, 25, 54, 44, 34, 36, 29, 16, 28, 29

135. Al lanzar 200 veces un dado Camila y Juan obtuvieron los siguientes resultados. Hallar las medidas de Dispersión y explicar:

x <sub>i</sub>	1	2	3	4	5	6
n <sub>i</sub> (Camila)	22	19	32	36	46	45
n <sub>i</sub> (Juan)	33	35	43	28	37	24

## NOTAS:

La Recuperación está sujeta a la programación realizada por la coordinación académica

La presentación del taller se valorará con el 20% de la nota final.

La sustentación escrita se valorará con el 80% de la nota final. (Consta de 5 puntos del mismo taller seleccionados al azar)