Capítulo 0

Precálculo

En la escala de Richter, la intensidad *I* de un terremoto se relaciona con su energía *E* (en ergios) por medio de la fórmula $\log E = 11.4 + 1.5I$. Las propiedades de la función logarítmica permiten demostrar fácilmente que si un terremoto tiene 2 grados más en la escala de Richter (Chile, 1960, 8.5; Japón, agosto 9 de 2009, 6.5) que otro, entonces liberará 1.000 veces más energía.

Contenido breve

Módulo 1
El sistema de los números reales

Módulo 2
El sistema de coordenadas cartesianas. La línea recta

Módulo 3
Funciones y sus gráficas

Ejercicios
Capítulo 0, módulos 1 al 3

Presentación

En este capítulo, denominado «Precálculo», se presentan algunos temas no tratados en el curso de álgebra y trigonometría, los cuales son fundamentales para abordar el estudio de un primer curso de cálculo diferencial.

Módulo 1

El sistema de los números reales

Giussepi Peano

Giussepi Peano nació en una granja cerca del pueblo de Spinetta, en el Piamonte, el 27 de agosto de 1858 y murió el 20 de abril de 1932 en Turín.

Fuente:
http://images.google.com.co/

Introducción

El ente básico de la parte de la matemática conocida como *análisis* lo constituye el llamado sistema de los números reales. Números tales como $1, 3, \sqrt[3]{5}, \pi, e,$ y sus correspondientes negativos, son usados en mediciones cuantitativas.

Existen dos métodos principales para estudiar el sistema de los números reales. Uno de ellos comienza con un sistema más primitivo –tal como el conjunto de los números naturales o enteros positivos 1, 2, 3, 4, ...–, y a partir de él, por medio de una secuencia lógica de definiciones y teoremas, se construye el sistema de los números reales[1].

En el segundo método se hace una descripción formal del sistema de los números reales (asumiendo que existe) por medio de un conjunto fundamental de propiedades (axiomas), de las cuales pueden deducirse muchas otras propiedades.

Objetivos

1. Hacer una construcción intuitiva del conjunto $\Re$ de los números reales y presentarlo como un campo ordenado.
2. Presentar los intervalos como subconjuntos infinitos de $\Re$ y efectuar operaciones de conjunto con ellos.
3. Estudiar el valor absoluto de un número real x y sus propiedades.

Preguntas básicas

1. Usando los signos de $\in, \notin, \subset, \not\subset$ llene los espacios en blanco de manera que se obtenga una proposición verdadera:

   5.41 _____ $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$ _____ $\mathbb{N}$

   $-\sqrt{216}$ _____ $\mathbb{Z}$; $\Re^+$ _____ $\mathbb{N}$

2. La desigualdad triangular establece que para todo $x, y \in \Re, |x+y| \leq |x| + |y|$. ¿En qué casos se verifica la igualdad?

1. El matemático Italiano G. Peano (1858-1932) presentó en 1889 un conjunto de cinco axiomas para los números naturales. Puede verse una discusión detallada en el desarrollo del sistema de los números reales por medio de los axiomas de Peano en el libro *Foundations of analysis*, de F. Landau, Nueva York, Chelsea, Publishing Co., 1951.

Contenidos

1.1 Conjunto de los números reales

En esta primera parte se hará una presentación intuitiva del conjunto $\Re$ de los números reales. Se parte de un conjunto primitivo como es el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales y se efectúan las sucesivas ampliaciones del mismo, atendiendo más a la necesidad de resolver ciertas ecuaciones en las cuales los conjuntos que se van definiendo resultan insuficientes para la solución, que a un desarrollo axiomático del mismo.

El conjunto de los números reales está constituido por diferentes clases de números. Entre ellas, se pueden mencionar los siguientes subconjuntos:

Conjunto de los números naturales

El conjunto de los números naturales, que se denota por $\mathbb{N}$ o también por $\mathbb{Z}^+$, corrientemente se presenta así:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}.$$

La notación de conjunto que incluye los puntos suspensivos es de carácter informal.

Este conjunto permite fundamentar las sucesivas ampliaciones que se hacen de los sistemas numéricos y lleva principalmente a la consideración de los números reales.

Conjunto de los números enteros

El conjunto de los números enteros, que se denota por $\mathbb{Z}$, corrientemente se presenta así:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

En el conjunto de los números enteros se pueden resolver ecuaciones que no tienen solución en $\mathbb{N}$, como sucede por ejemplo con la ecuación $x + 3 = 1$, cuya solución es $x = -2$.

Puede notarse que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Conjunto de los números racionales

El conjunto de los números racionales, que se denota por $\mathbb{Q}$, se define de la siguiente manera:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : \quad \text{con } m, n \text{ enteros y } n \neq 0 \right\}.$$

La introducción de los números racionales responde al problema de resolver la ecuación

$$ax = b, \text{ con } a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0.$$

Esta ecuación sólo tiene solución en $\mathbb{Z}$, en el caso particular en que *a* sea un divisor de *b*.

Note que todo entero *n* puede escribirse como el número racional *n*/1 y, en consecuencia, se puede concluir que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

En lo sucesivo, cuando se haga referencia a los números racionales, *a*/*b*, *c*/*d*, ..., se entenderá que *a*, *b*, *c*, *d*, ... son números enteros y que los denominadores son diferentes de cero.

Conjunto de los números irracionales

En muchos temas de la geometría se plantean, en general, problemas para cuya solución el conjunto de los números racionales resulta insuficiente. Así por ejemplo, al considerar el problema de determinar el número *x* que mide la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado sea la unidad, el teorema de Pitágoras permite establecer que *x* satisface la ecuación $x^2 = 2$. Puede demostrarse fácilmente que no existe $x \in \mathbb{Q}$ que verifique esta última ecuación. En general, una ecuación de la forma $x^n = a$, con $a \in \mathbb{Q}$ y $n \in \mathbb{N}$, carecerá (excepto casos particulares) de solución. Se hace necesario, por tanto, describir otro conjunto, en el cual ecuaciones como las anteriores tengan solución.

El conjunto de los números irracionales, que se denota por $\mathbb{Q}^*$, está constituido por los números reales que no admiten la representación racional.

Ejemplos de esta clase de números son el número *e* (base del logaritmo natural), $\pi, \sqrt{2},$ etc.

En este conjunto se pueden resolver ecuaciones que no tienen solución en $\mathbb{Q}$, como sucede, por ejemplo, con la ecuación $x^2 = 2$, cuyas soluciones son $x = \pm\sqrt{2}$, que no son números racionales.

Conjunto $\Re$ de los números reales

Se define como $\Re = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$.

En el conjunto de los números reales están definidas dos operaciones: *adición* (+) y *multiplicación* (·), las cuales verifican las siguientes propiedades AC (llamadas también axiomas de campo).

1.2 Axiomas de campo

AC1: Uniforme

Si se suman entre sí dos números reales, el resultado que se obtiene es un real único.

Si se multiplican entre sí dos números reales, el resultado que se obtiene es un real único.

AC2: Conmutativa

Para todo $a,\ b \in \Re,\ \begin{cases} a+b=b+a. \\ a\cdot b=b\cdot a. \end{cases}$

AC3: Asociativa

Para todo $a,\ b,\ c \in \Re,\ \begin{cases} a+(b+c)=(a+b)+c. \\ a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c. \end{cases}$

AC4: Modulativa

Existe el real 0 (cero) tal que para todo $a \in \Re$,

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Existe el real 1 (uno), $1 \neq 0$, tal que para todo $a \in \Re$,

$$a\cdot 1 = 1\cdot a = a.$$

El real 0 es llamado *módulo* o *elemento neutro* para la adición.
El real 1 es llamado *módulo* o *elemento neutro* para la multiplicación.

AC5: Invertiva

Para cada número real a existe un real único llamado *el opuesto* de a, y que se denota $(-a)$, tal que

$$a+(-a)=0.$$

Para cada número real $a \neq 0$ existe un real único llamado *el recíproco* de a, y que se denota por a^{-1} o $1/a$, tal que

$$a\cdot a^{-1} = a\cdot(1/a) = 1.$$

Así por ejemplo, el opuesto de 5 es -5; el recíproco de -2 es $1/-2$.

Debe notarse que $(-a)$ no significa un número negativo, aunque en algunas ocasiones puede serlo. Así, -3 es negativo y es el opuesto de 3, mientras que $-(-5)$ es positivo y es el opuesto de -5.

El opuesto de a también se conoce como *inverso aditivo*, y el recíproco de a también es llamado *inverso multiplicativo* de a.

AC6: Distributiva

Para todo $a, b, c \in \Re$, $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c.$

Consecuencias importantes de los axiomas de campo

A continuación se presentan, sin demostración, las consecuencias más importantes de los axiomas de campo. Más que una simple lista, son propiedades conocidas por el estudiante y que le serán bastante útiles en el desarrollo del curso. En algunas demostraciones de los teoremas del cálculo haremos referencia a ellas.

C1: Ley cancelativa para la adición (multiplicación)

$x + y = x + z \Rightarrow y = z.$

Si $x \neq 0$, entonces $xy = xz \Rightarrow y = z.$

C2 Para todo $a, b \in \Re$, la ecuación $x + a = b$ tiene una y sólo una solución en $\Re$.

C3 Para todo $x \in \Re$, $x \cdot 0 = 0.$

C4 $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0.$

C5 Para todo $x \in \Re$, si $x \neq 0$, entonces $x^{-1} = \dfrac{1}{x} \neq 0.$

C6 Si $y \neq 0$, entonces $\dfrac{x}{y} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

C7 Para todo $x \in \Re$, $-(-x) = x.$

C8 Si $x \neq 0$, entonces $(x^{-1})^{-1} = x.$

C9 Para todo $x, y \in \Re$, $-(x+y) = (-x) + (-y).$

C10 Si $x \neq 0$, $y \neq 0$, entonces $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$. Equivalentemente, $\dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y}.$

C11 Si $b \neq 0$, $d \neq 0$, entonces $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$

C12 Si $b \neq 0$, $d \neq 0$, entonces $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot d}.$

C13 Si $b \neq 0$, $d \neq 0$, entonces $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}.$

C14 Para todo $x \in \Re$, $-x = (-1)x.$

C15 $(-1) \cdot (-1) = 1.$

C16 $(-x)\cdot(-y) = xy.$

C17 $-(xy) = (-x)y = x(-y).$

C18 $-\dfrac{x}{y} = \dfrac{-x}{y} = \dfrac{x}{-y}, \quad y \neq 0.$

C19 $x(y - z) = xy - xz.$

C20 $(x - y) + (y - z) = x - z.$

C21 $(a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c).$

C22 $(a + b)\cdot(c + d) = (a \cdot c + b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c).$

C23 $(a - b)\cdot(c - d) = (a \cdot c + b \cdot d) - (a \cdot d + b \cdot c).$

C24 $a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = b + c.$

C25 Si $x^2 = x \cdot x$, entonces $x^2 - y^2 = (x - y)\cdot(x + y).$

1.3 Axiomas de orden

Los axiomas o propiedades del sistema de los números reales que se enuncian a continuación se expresan en términos de un cierto *subconjunto especial de* $\Re$ (este subconjunto, denotado por $\Re^+$, se identifica con el conjunto de los reales positivos). En general, cualquier campo que tenga un subconjunto *P* con las propiedades AO mencionadas a continuación, es llamado un *campo ordenado*. En el caso particular que se estudiará, estas propiedades permiten establecer que el sistema de los números reales es un *campo ordenado*.

AO1

Existe un subconjunto $\Re^+$ de $\Re$ tal que:

i. Si $a, b \in \Re^+$, entonces $(a+b) \in \Re^+$.
$$a \cdot b \in \Re^+.$$

ii. Para cada $a \in \Re$, una y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera:

$$-a \in \Re^+; \quad a = 0; \quad a \in \Re^+.$$

Los elementos $a \in \Re$, para los cuales $a \in \Re^+$, serán llamados *reales positivos*.

Los elementos $a \in \Re$, para los cuales $-a \in \Re^+$, serán llamados *reales negativos*.

Desigualdades

Usando solamente el subconjunto $\Re^+$ descrito en AO1, se deducen todas las reglas usuales en el trabajo con desigualdades de números reales.

Definiciones

Sean x, y números reales.

i. Los símbolos «<» y «>» (que se leen «menor que» y «mayor que», respectivamente) se definen por las afirmaciones:

$$x < y \Leftrightarrow y - x \in \Re^+.$$

$$x > y \Leftrightarrow x - y \in \Re^+.$$

ii. Los símbolos «$\leq$» y «$\geq$» (que se leen «menor o igual que» y «mayor o igual que», respectivamente) se definen por las afirmaciones:

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \;\vee\; x = y.$$

$$x \geq y \Leftrightarrow x > y \;\vee\; x = y.$$

Cada una de las expresiones $x < y,\ x > y,\ x \leq y,\ x \geq y$ es llamada *desigualdad*.

De la definición anterior se sigue que las desigualdades $x > y$ e $y < x$ son equivalentes. Igualmente, las desigualdades $x \leq y$ e $y \geq x$ son equivalentes.

iii. La expresión $x < y < z$ se usa para indicar las dos desigualdades simultáneas: $x < y$ e $y < z$. Igualmente, la expresión $x > y > z$ se usa para indicar las dos desigualdades simultáneas: $x > y$ e $y > z$.

En cualquiera de los dos casos de la definición *iii*, se dice que *y* está entre *x* y *z*.

Interpretaciones similares pueden establecerse para las desigualdades:

$$x \leq y \leq z;\quad x \geq y \geq z;\quad x < y \leq z;\quad x \leq y < z, \text{etc.}$$

Claramente, $a \in \Re^+ \Leftrightarrow a > 0.$

a es negativo $\Leftrightarrow a < 0.$

Las propiedades siguientes, que enunciamos sin demostración, son consecuencia inmediata de la propiedad de orden y serán útiles en el trabajo con desigualdades.

Consecuencias principales de la propiedad de orden

01: Tricotomía

Si $x, y \in \Re,$ entonces una y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera:

$x > y$; $x = y$; $x < y.$

02: Transitiva

Para todo $x, y, z \in \Re,$

$x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z.$
$x > y \wedge y > z \Rightarrow x > z.$

03 Si $x, y, z \in \Re,$ entonces:

$x < y \Rightarrow x + z < y + z \wedge x - z < y - z$.
$x > y \Rightarrow x + z > y + z \wedge x - z > y - z$.
$x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z \wedge x - z \leq y - z.$
$x \geq y \Leftrightarrow x + z \geq y + z \wedge x - z \geq y - z.$

04 $a > b > 0$ y $c \geq d > 0,$ entonces:

$a \cdot c > b \cdot d.$

05 Las siguientes reglas de los signos para la adición y multiplicación de reales se cumplen:

(número positivo)	+	(número positivo)	=	número positivo.
(número negativo)	+	(número negativo)	=	número negativo.
(número positivo)	·	(número positivo)	=	número positivo.
(número negativo)	·	(número negativo)	=	número positivo.

06 $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c.$
$a < b$ y $c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c.$

Las dos propiedades anteriores muchas veces se expresan diciendo que si ambos miembros de una desigualdad se multiplican por una cantidad positiva, el sentido de la desigualdad se conserva, mientras que si se multiplican por una cantidad negativa, el sentido de la desigualdad cambia.

07 Para todo $x \in \Re,\ x^2 \geq 0.$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$

08 $x > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x} > 0.$

09 $x > y > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}.$

1.4 Representación geométrica de los números reales

Una manera de representar geométricamente los números reales consiste en tomar una recta generalmente en forma horizontal y fijar dos puntos distintos en ella, denotando con 0 (cero) al de la izquierda y con 1 (uno) al de la derecha.

Se considera que cada punto de la recta corresponde a un número real, y viceversa: a cada número real le corresponde uno y sólo un punto de dicha recta. Se establece de esta forma una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de esta recta, la cual nos permite decir en adelante que cada punto «es» un número real. A la recta sobre la cual se hacen representaciones de los números reales se le seguirá llamando *recta real*, o también, *recta numérica*.

Recurriendo a la idea de distancia y tomando como unidad de longitud el segmento de recta entre 0 y 1, que en adelante se llamará *segmento unitario*, como punto de partida el 0, que en adelante se llamará *origen*, como números positivos los puntos que se dan a la derecha del origen, y negativos los que se dan a su izquierda, se puede entonces localizar algunos números reales. Así, para localizar los números enteros se lleva sucesivamente, y a ambos lados de 0 y 1, el segmento unitario, como aparece en la figura 1.1.

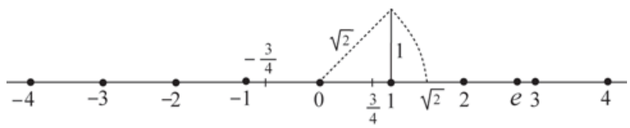


Figura 1.1

Existe una construcción geométrica sencilla para localizar números racionales en la recta real. Ilustremos el procedimiento por medio de un ejemplo. Para representar, por ejemplo, el número racional 12/5, se traza por el origen 0 de la recta real una segunda recta oblicua y a partir de 0 se marcan cinco (5) segmentos iguales sobre la oblicua con extremos en P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 (figura 1.2).

A continuación se traza la recta que une a P_5 con el racional $3 = 15/5$ y luego cuatro rectas paralelas a la anterior y que pasen por los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5.

Por geometría elemental se sabe que este sistema de rectas paralelas corta al segmento entre 0 y 3 en cinco partes iguales de manera que la longitud de cada parte es 3/5.

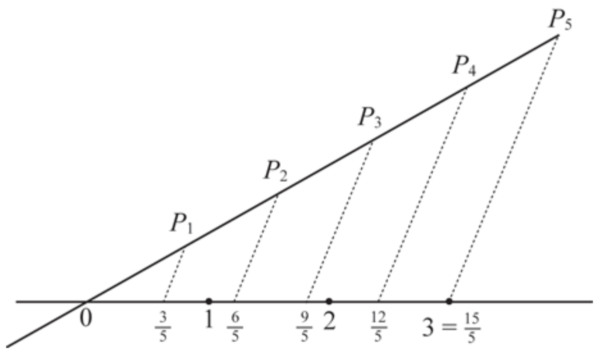


Figura 1.2

En consecuencia, cada punto de corte en la recta real corresponde en forma sucesiva a los racionales 3/5, 6/5, 9/5, 12/5 y 15/5, entre los cuales se encuentra el racional que se quería representar en la recta.

Para los enteros positivos que no son cuadrados perfectos, se puede demostrar que su raíz cuadrada es un número irracional, cuya localización en la recta numérica se logra de una manera sencilla empleando el teorema de Pitágoras (figura 1.3).

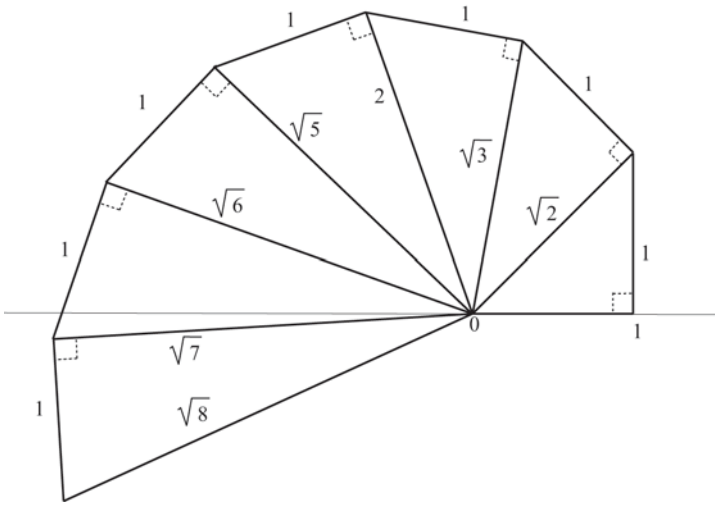


Figura 1.3

Otros números irracionales, como $\pi \approx 3.1415927...$ y $e \approx 2.7182818...$, serán localizados en su forma decimal aproximada.

1.5 Intervalos y valor absoluto

Entre los subconjuntos infinitos del conjunto de los reales se destacan nueve de ellos, llamados *intervalos*, y que se definen de la siguiente forma:

Definiciones

i. Sean $a,\ b \in \Re$, con $a < b$.

1. El conjunto de puntos $\{x \in \Re : a < x < b\}$ se llama *intervalo abierto* de extremos a y b. Se denota por $(a,\ b)$. Así que:

$$(a,\ b) = \{x \in \Re : a < x < b\},$$

y geométricamente se representa en la recta real en la forma de la figura 1.4.

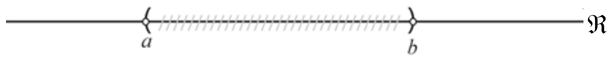


Figura 1.4

2. El conjunto de puntos $\{x \in \Re : a \le x \le b\}$ se llama *intervalo cerrado* de extremos a y b. Se denota por $[a,\ b]$. Así que:

$$[a, b] = \{x \in \Re : a \le x \le b\},$$

y geométricamente se representa en la recta real en la forma de la figura 1.5.

Figura 1.5

Nótese que $a \notin (a,\ b)$, $b \notin (a,\ b)$, $a \in [a,\ b]$, $b \in [a,\ b]$.

De manera similar se pueden definir y representar geométricamente los demás tipos de intervalos, que aparecen a continuación de una manera simple.

3. $(a,\ b] = \{x \in \Re : a < x \le b\}$ (figura 1.6).

Figura 1.6

4. $[a,\ b) = \{x \in \Re : a \le x < b\}$ (figura 1.7).

Figura 1.7

ii. Sea $a \in \Re$. Un intervalo de cualquiera de las siguientes formas se llama *semirrecta*.

5. $(-\infty, a) = \{x \in \Re : -\infty < x < a\}$ (figura 1.8).

Figura 1.8

6. $(-\infty, a] = \{x \in \Re : -\infty < x \leq a\}$ (figura 1.9).

Figura 1.9

7. $(a, +\infty) = \{x \in \Re : a < x < +\infty\}$ (figura 1.10).

Figura 1.10

8. $[a, +\infty) = \{x \in \Re : a \leq x < +\infty\}$ (figura 1.11).

Figura 1.11

iii. Finalmente, el conjunto $\Re$ de los números reales se define como el intervalo $(-\infty, +\infty)$. Es decir:

9. $(-\infty, +\infty) = \{x \in \Re : -\infty < x < +\infty\}$.

Como los intervalos son conjuntos, podemos efectuar con ellos las operaciones básicas entre conjuntos: unión, intersección, diferencia, complemento, etc.

El ejemplo 1 de los ejercicios resueltos al final del capítulo ilustra la forma de efectuar dichas operaciones.

Valor absoluto

- **Definición**

Sea $x \in \Re$. El valor absoluto de *x*, denotado por $|x|$, se define como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Así, $|5| = 5$; $|-8| = -(-8)$; $|0| = 0$.

El valor absoluto de un número real *x* es siempre positivo o cero y se interpreta geométricamente como la distancia del punto *x* al origen (figura 1.12). Igualmente, $|x - y|$ se interpreta como la distancia del punto *x* al punto *y* en la recta real (figura 1.13).

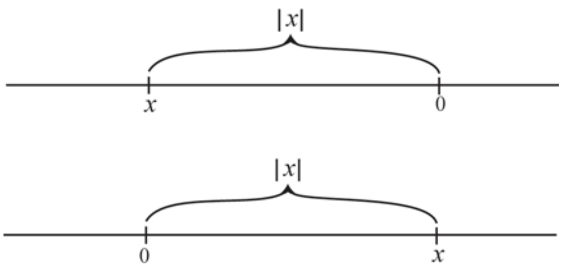


Figura 1.12

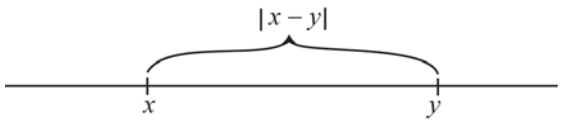


Figura 1.13

- **Propiedades del valor absoluto (VA)**

VA1 Para todo $x \in \Re$, $|x| \geq 0$ y $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

VA2 $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$.

VA3 $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, para todo $x, y \in \Re$.

VA4 $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, y \neq 0.$

VA5 $|-x| = |x|.$
$|x - y| = |y - x|.$

VA6 $|x|^2 = x^2.$

VA6' $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2.$

VA7 $|x| < \in \Leftrightarrow -\in < x < \in$, siempre que $\in > 0$.

VA8 $|x| \leq \in \Leftrightarrow -\in \leq x \leq \in$, siempre que $\in \geq 0$.

VA9 $|x| > a \Leftrightarrow x > a \vee x < -a$, siempre que $a > 0$.

VA10 $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a.$

VA11 $-|x| \leq x \leq |x|$, para todo $x \in \Re$.

VA12: Desigualdad triangular

Para todo $x, y \in \Re$, $|x+y| \leq |x|+|y|$.
¿En qué caso se verifica la igualdad? (compruebe).

VA13 $|x-y| \leq |x|+|y|$.

VA14 $\left||x|-|y|\right| \leq |x-y|$.

1.6 Solución de desigualdades (inecuaciones)

En una desigualdad que envuelve una incógnita, dígase la letra x, un valor particular de x satisface la desigualdad si al reemplazar x por su valor particular (en todas sus ocurrencias) la convierte en una proposición verdadera.

Así por ejemplo, $x = 1$ es un valor particular de x que satisface la desigualdad $3x - 1 < x + 5$, ya que $3(1) - 1 < 1 + 5$, mientras que $x = 4$ no es solución particular.

Resolver una desigualdad es encontrar el conjunto de todos los números reales que la hacen verdadera. En contraste con una ecuación, cuya solución en general es un número o quizá un conjunto finito de números, el conjunto solución de una desigualdad consta por lo común de un intervalo, unión finita de intervalos y en algunos casos el conjunto vacío.

Así, el conjunto solución de la desigualdad $x^2 - x < 6$ es el intervalo $(-2, 3)$, el conjunto solución de la desigualdad $x^2 - x \geq 6$ es $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$ y el conjunto solución de la desigualdad $x^2 + 5 < 4$ es el conjunto vacío (¿por qué?).

El procedimiento para resolver desigualdades consiste en transformar la desigualdad inicial en una desigualdad *equivalente* (tiene las mismas soluciones). Las herramientas principales para hacerlo son el uso adecuado de las propiedades de orden y sus consecuencias. Ello implica que debemos realizar ciertas operaciones en una desigualdad sin cambiar el conjunto solución. En particular:

1. Se puede sumar (restar) la misma cantidad en ambos miembros de una desigualdad.

2. Se pueden multiplicar (dividir) ambos miembros de una desigualdad por una misma cantidad positiva.

3. Se pueden multiplicar (dividir) ambos miembros de una desigualdad por una misma cantidad negativa, pero entonces se debe invertir el sentido del signo de la desigualdad.

Los ejemplos 2, 3, 4, 5 y 6 de los ejercicios resueltos al final del capítulo ilustran el procedimiento a seguir en cada caso. En particular, en los ejemplos 5 y 6 se explica un procedimiento gráfico, mucho más expedito para solucionar desigualdades que el método analítico.

Módulo 2

El sistema de coordenadas cartesianas. La línea recta

Luowing Philipp Cantor

Luowing Philipp Cantor nació el 3 de marzo de 1845 en San Petersburgo (Rusia) y murió el 6 de enero de 1918 en Halle (Alemania).

Fuente:
http://140.128.17.1/mkuo/

Introducción

El propósito en este módulo es presentar las diferentes formas de la línea recta. Antes de hacerlo se presentan algunos conceptos preliminares, como el de distancia entre dos puntos del plano y las coordenadas del punto que divide a un segmento en una razón dada, así como también los conceptos de pendiente e inclinación de una recta en el plano cartesiano.

Se asume que el lector conoce los conceptos de plano cartesiano y la localización de puntos en el mismo.

Objetivos

1. Determinar las coordenadas del punto medio de un segmento de recta.
2. Diferenciar entre pendiente e inclinación de una recta.
3. Presentar las diferentes formas de la ecuación de una recta.
4. Establecer las condiciones de perpendicularidad y paralelismo entre rectas.

Preguntas básicas

1. Sean $P_1(-1,1)$ y $P_2(3,0)$ dos puntos en el plano. Determine las coordenadas del punto P sobre el segmento P_1P_2 tal que $\dfrac{P_1P}{P_1P_2}=\dfrac{1}{3}$.
2. Verdadero o falso.
   Sean $A_1x+B_1y+C_1=0$ y $A_2x+B_2y+C_2=0$ las ecuaciones de dos rectas en el plano. Entonces:
   a. Las rectas son coincidentes si y sólo si $A_1B_2=A_2B_1$.
   b. Las rectas son perpendiculares si y sólo si $A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0$.

Contenido

2.1 Teorema: Distancia entre dos puntos del plano

Sean $P_1\,(x_1, y_1)$ y $P_2\,(x_2, y_2)$ dos puntos en el plano.

La distancia entre los puntos P_1 y P_2, denotada por $d = |P_1P_2|$, está dada por

$$d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1)$$

Demostración

En la figura 2.1 se han localizado los puntos $P_1\,(x_1, y_1)$ y $P_2\,(x_2, y_2)$, así como también el segmento de recta $\overline{P_1P_2}$.

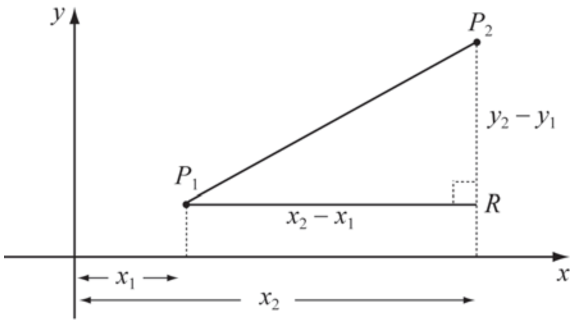


Figura 2.1

Al trazar por el punto P_1 una paralela al eje x y por P_2 una paralela al eje y, éstas se intersecan en el punto R, determinando el triángulo rectángulo P_1RP_2 y en el cual se puede aplicar la relación pitagórica

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1R}^2 + \overline{RP_2}^2.$$

Pero $\overline{P_1P_2}^2 = |P_1P_2|^2$, $\overline{P_1R} = x_2 - x_1$ y $\overline{RP_2} = y_2 - y_1$.

Por tanto, $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Observaciones

i. En la fórmula (1) se observa que la distancia entre dos puntos es siempre un valor no negativo. Nótese además que el orden en el cual se restan las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 no afecta el valor de la distancia.

ii. Si el segmento rectilíneo determinado por los puntos P_1 y P_2 es paralelo al eje x (figura 2.2*a*), entonces $|P_1P_2| = |x_2 - x_1|$ puesto que $y_1 = y_2$.

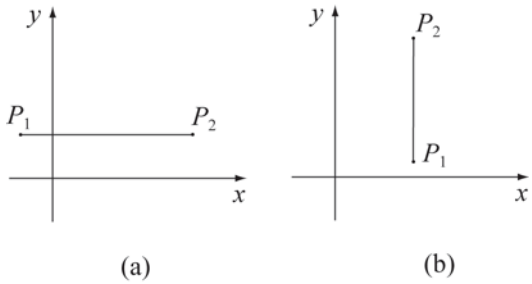


Figura 2.2

Igualmente, si dicho segmento es paralelo al eje y (figura 2.2b), entonces $|P_1P_2| = |y_2 - y_1|$ puesto que $x_2 = x_1$.

2.2 Coordenadas del punto que divide a un segmento en una razón dada. Coordenadas del punto medio

Considere el segmento $|P_1P_2|$ cuyos extremos son los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ (figura 2.3).

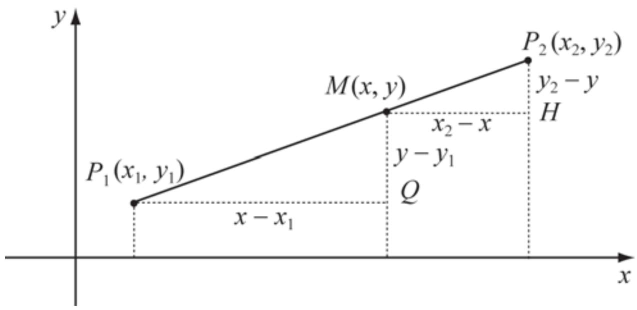


Figura 2.3

Sea $M(x, y)$ un punto sobre el segmento $\overline{P_1P_2}$ y llamemos $\lambda = \dfrac{\overline{P_1M}}{\overline{P_1P_2}}$. (1)

Se trata entonces de encontrar las coordenadas x e y del punto M en términos de λ y de las coordenadas de los puntos P_1 y P_2.

Al proyectar los puntos P_1, P_2 y M sobre los ejes coordenados resultan los triángulos rectángulos semejantes P_2MH y P_1MQ. Entonces se puede escribir

$$\frac{y_2 - y}{y - y_1} = \frac{x_2 - x}{x - x_1} = \frac{\overline{MP_2}}{\overline{P_1M}}. \qquad (2)$$

Ahora, de (1) $\dfrac{\overline{MP_1}}{\overline{P_1P_2}} = \dfrac{\lambda}{1}$.

Por tanto, $\dfrac{\overline{P_1M}}{\overline{P_1P_2}-\overline{P_1M}}=\dfrac{\lambda}{1-\lambda}$ (obsérvese que cuando M se mueve de P_1 a P_2, λ varía de manera continua tomando valores entre 0 y 1).

En consecuencia, $\dfrac{\overline{P_1M}}{\overline{MP_2}}=\dfrac{\lambda}{1-\lambda}$, que al sustituir en (2) da

$$\frac{y_2-y}{y-y_1}=\frac{x_2-x}{x-x_1}=\frac{1-\lambda}{\lambda}.$$

De donde $\dfrac{1-\lambda}{\lambda}=\dfrac{y_2-y}{y-y_1}$, y (3)

$$\frac{x_2-x}{x-x_1}=\frac{1-\lambda}{\lambda}. \qquad (4)$$

Al simplificar las ecuaciones (3) y (4) se obtienen finalmente:

$$y=y_1+\lambda(y_2-y_1), \qquad (5)$$

$$x=x_1+\lambda(x_2-x_1). \qquad (6)$$

Las ecuaciones (5) y (6) resuelven el problema.

Observaciones

i. Nótese que para cada valor de $\lambda, 0\leq\lambda\leq 1,$ las ecuaciones (5) y (6) nos dan un punto sobre el segmento P_1P_2.

ii. En muchas ocasiones, el segmento P_1P_2 se expresa en notación de conjunto en la siguiente forma:

$$\overline{P_1P_2}=\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, \begin{matrix} x=x_1+\lambda(x_2-x_1) \\ y=y_1+\lambda(y_2-y_1) \end{matrix};\quad 0\leq\lambda\leq 1\right\}.$$

iii. Nótese finalmente que cuando M coincide con el punto medio de $\overline{P_1P_2}$,

entonces $\lambda=\dfrac{P_1M}{P_1P_2}=\dfrac{1}{2}$, y en consecuencia

$$x=x_1+\frac{1}{2}(x_2-x_1) \text{ e } y=y_1+\frac{1}{2}(y_2-y_1).$$

Es decir, $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ e $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$ representan las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$.

2.3 Pendiente e inclinación de una recta

Definiciones

i. El ángulo θ $(0 \leq \theta < \pi)$ que forma una recta L con el eje x medido en el sentido positivo del eje a la recta L se llama *ángulo de inclinación* de la recta L (figura 2.4*a*).

ii. Si L es una recta no vertical, la *pendiente* de la recta L, denotada por m, se define como el valor de la tangente de su ángulo de inclinación. Es decir,

$$m = \tan\theta, \tag{1}$$

siendo $0 \leq \theta < \pi, \quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2}.$

El número m se conoce también con el nombre de *coeficiente angular* de la recta L.

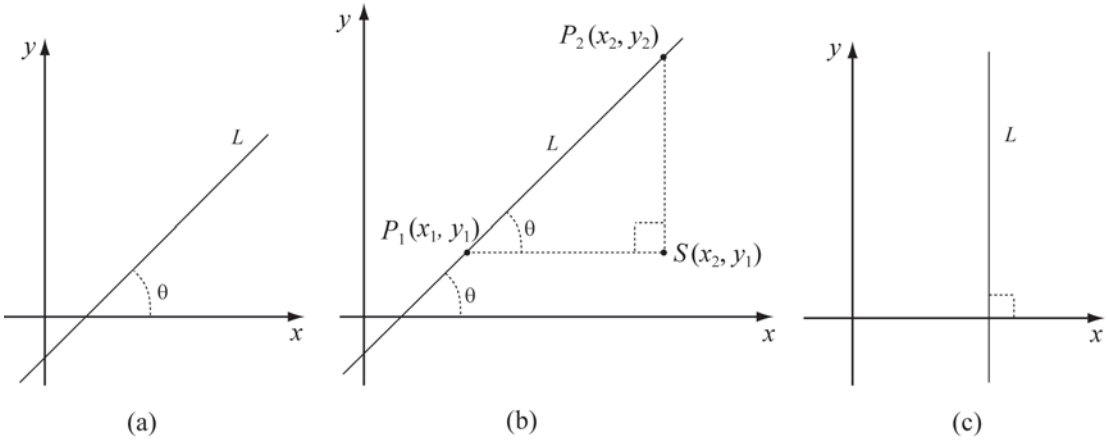


Figura 2.4

Observaciones

i. Si la recta L es vertical, su ángulo de inclinación es 90º y por tanto su pendiente $m =$ tan 90º $= +\infty$ (figura 2.4*c*).

ii. Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos distintos sobre una recta no vertical L (figura 2.4*b*), entonces, de acuerdo a la definición de pendiente, se tiene que

$$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_2 \neq x_1. \tag{2}$$

Las expresiones (1) y (2) son equivalentes y en lo sucesivo se hará uso indistinto de ellas. Nótese que el coeficiente angular m es igual al incremento de ordenadas dividido por el incremento de abscisas.

iii. El nombre de pendiente de una recta está justificado. Cuando se dice que un camino tiene la pendiente 5%, significa que por cada 100 unidades horizontales asciende 5 unidades, es decir, el cociente de las ordenadas por las abscisas correspondientes es 5/100.

iv. La pendiente de una recta puede ser positiva, negativa o cero, según el ángulo de inclinación de la recta, así:

Si $\theta = 0^o$, entonces $m = 0$ (figura 2.5*a*).

Si $0^o < \theta < 90^o$, entonces $m > 0$ (figura 2.5*b*).

Si $90^o < \theta < 180^o$, entonces $m < 0$ (figura 2.5*c*).

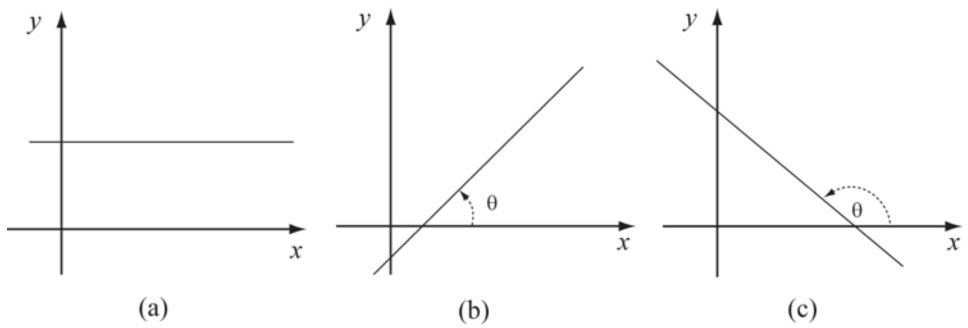


Figura 2.5

v. El valor de la pendiente de una recta no depende de la elección particular de los puntos P_1 y P_2 escogidos sobre ellas.

Dados tres puntos P_1, P_2 y P_3 del plano, se dice que son *colineales* si y sólo si la pendiente determinada por P_1 y P_2 es igual a la determinada por P_2 y P_3 e igual a la determinada por P_1 y P_3.

2.4 Formas de la ecuación de la línea recta

2.4.1 Ecuación de la recta que pasa por el origen

Considere la recta l que pasa por el origen O y forma un ángulo de inclinación θ con el eje x (figura 2.6).

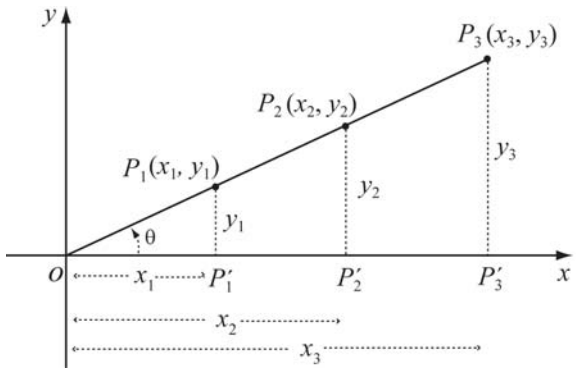


Figura 2.6

Tómese sobre la recta los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2\ (x_2, y_2)$ y $P_3\ (x_3, y_3)$. Al proyectar los puntos P_1, P_2 y P_3 sobre el eje x, se obtienen los puntos P_1', P_2' y P_3'.

Como los triángulos OP_1P_1', OP_2P_2' y OP_3P_3' son semejantes, se tiene que

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \text{const} = \tan\theta = m.$$

Esto es, cualquiera que sea el punto $P(x, y)$ sobre l, $\dfrac{y}{x} = m$ o $y = mx$. (1)

La ecuación (1) es la ecuación de la recta que pasa por el origen y tiene pendiente conocida m.

2.4.2 Ecuación de la recta conocida su pendiente *m* y su intercepto *b* con el eje *y*

Considere una recta l de la que se conocen m ($m = \tan\theta$) y b (figura 2.7).

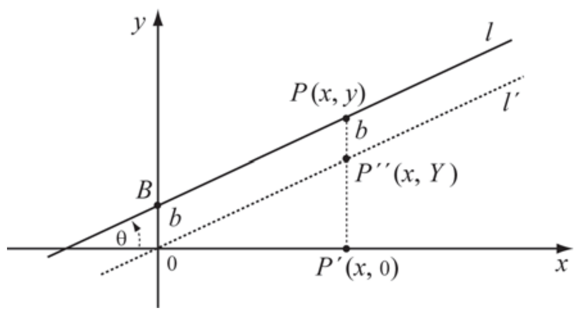


Figura 2.7

Trace por el origen la recta $l´$ paralela a l. Sea $P\ (x, y)$ un punto de l. Al llamar $P´$ la proyección de P sobre el *eje x*, $PP´$ corta a la recta $l´$ en un punto $P´´$ de coordenadas $P´´(x, Y)$, $Y \neq y$.

Como $P´´\ (x, Y)$ está sobre $l´$, entonces $\dfrac{Y}{x} = \tan\theta = m$, de donde $Y = mx$.

Ahora, el cuadrilátero $OBPP''$ es un paralelogramo. Por tanto, $P''P = OB = b$, y se tiene que:

$$y = P'P = P'P'' + P''P = Y + b = mx + b.$$

Es decir, para todo $(x, y) \in l$, $y = mx + b = (\tan\theta)x + b$.

La ecuación $y = mx + b$ es la ecuación de la recta en términos de su pendiente m y su intercepto b con el eje y.

2.4.3 Ecuación de la recta que pasa por un punto *y* de pendiente conocida

Considere la recta l que pasa por un punto dado $P_1(x_1, y_1)$ y cuya pendiente m también es conocida (figura 2.8).

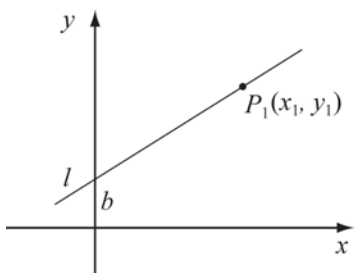


Figura 2.8

Al llamar b al intercepto de la recta l con el eje y, entonces la ecuación de l viene dada por

$$y = mx + b. \qquad (1)$$

Como $P_1(x_1, y_1) \in l$, entonces satisface (1) y en consecuencia se tiene que

$$y_1 = mx_1 + b. \qquad (2)$$

Al restar de la ecuación (2) la ecuación (1) se elimina el parámetro b que se desconoce y se obtiene

$$y - y_1 = m(x - x_1). \qquad (3)$$

La ecuación (3) es conocida como la forma *punto-pendiente* de la ecuación de la recta.

Nótese que la ecuación (3) también puede escribirse en la forma

$$y = mx + (y_1 - mx_1),$$

lo que indica que el intercepto b con el eje y viene dado por

$$b = y_1 - mx_1.$$

2.4.4 Ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$

Sea l la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ y llámese m_1 su pendiente.

Como l pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m_1 (figura 2.9), se tiene, de acuerdo a 2.4.3, que

$$y - y_1 = m_1 (x - x_1) \qquad (1)$$

representa la ecuación de dicha recta.

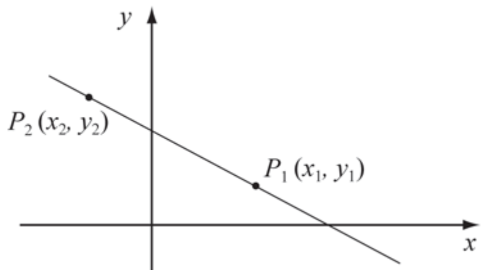


Figura 2.9

Ahora, como el punto $P_2(x_2, y_2) \in l$, entonces satisface su ecuación, esto es,

$$y_2 - y_1 = m_1(x_2 - x_1), \text{ de donde}$$

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad x_2 \neq x_1. \qquad (3)$$

La ecuación (3) se conoce como la forma *dos-puntos* de la ecuación de la recta.

Observaciones

i. Nótese que la ecuación (2) nos proporciona el valor de la pendiente m y la ecuación (3) también puede escribirse en la forma

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \left[y_1 - x_1 \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right],$$

lo que indica que el intercepto de la recta l con el eje y viene dado por

$$b = y_1 - x_1 \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

ii. Si (x, y) es un punto cualquiera de la recta determinada por $P_1(x_1, y_1)$, entonces la ecuación de la recta (3) también puede escribirse en forma de determinante, así:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.4.5 Ecuación segmentaria de la recta

Considere la recta l de la cual se conocen los interceptos a y b con los ejes x e y, respectivamente (figura 2.10).

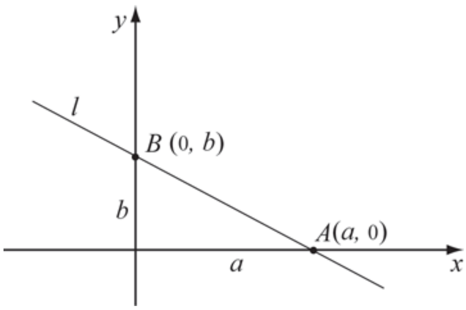


Figura 2.10

Como l pasa por los puntos $A\ (a, 0)$ y $B\ (0, b)$, entonces, de acuerdo a la sección 2.4.4, la ecuación de l viene dada por:

$$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x-a).$$

Es decir, $y = \dfrac{-b}{a}(x-a),$ de donde $\dfrac{b}{a}x + y = b.$

Dividiendo esta última ecuación por b, se obtiene

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (1)$$

La ecuación (1) se conoce como la ecuación *segmentaria*, *canónica* o *forma de los interceptos* de la línea recta. Los números a y b son las medidas de los segmentos que la recta interseca con cada eje, con su signo correspondiente, pues haciendo en (1)

$$\begin{cases} y = 0, \text{ resulta } x = a \text{ (intercepto con el eje } x) \\ x = 0, \text{ resulta } y = b \text{ (intercepto con el eje } y) \end{cases}$$

2.4.6 Ecuación general de la línea recta

La ecuación $Ax + By + C = 0$, donde A, B, C son números reales y A y B no son simultáneamente nulos, se conoce como la *ecuación general* de primer grado en las variables x e y.

La ecuación explícita de la recta, cuando se conocen dos puntos, excluye las rectas paralelas al eje y, cuyas ecuaciones son de la forma x = *constante*, pero todas las rectas del plano, sin excepción, quedan incluidas en la ecuación $Ax + By + C = 0$ que se conoce como la *ecuación general* de la línea recta, como lo afirma el siguiente teorema:

Teorema

La ecuación general de primer grado

$$Ax + By + C = 0, \qquad (1)$$

con $A, B, C \in \Re$, A y B no simultáneamente nulos, representa una línea recta.

Demostración

Se pueden considerar varios casos:

i. $A = 0, B \neq 0.$

En este caso, la ecuación (1) se transforma en $By + C = 0$, de donde

$$y = -\frac{C}{B}. \qquad (2)$$

La ecuación (2) representa una línea recta paralela al eje x y cuyo intercepto con el eje y es $-\frac{C}{B}$ (figura 2.11).

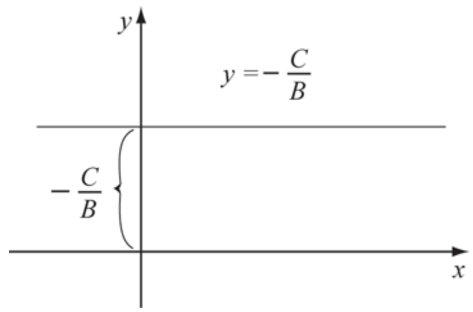


Figura 2.11

ii. $A \neq 0,\ B = 0.$

En este caso, la ecuación (1) se transforma en $Ax + C = 0$, de donde

$$x = -\frac{C}{A}. \qquad (3)$$

La ecuación (3) representa una línea recta paralela al eje y y cuyo intercepto con el eje x es $-\frac{C}{A}$ (figura 2.12).

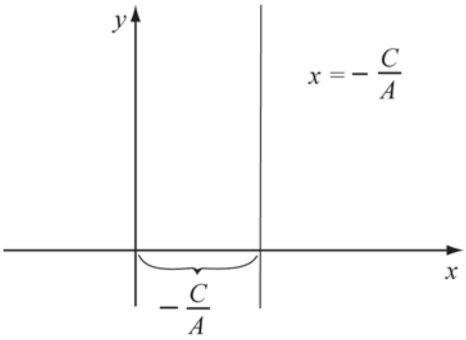


Figura 2.12

iii. $A \neq 0,\ B \neq 0.$

En este caso, la ecuación (1) puede escribirse en la siguiente forma:

$$y = -\frac{A}{B}x + \left[-\frac{C}{B}\right]. \qquad (4)$$

La ecuación (4) representa una línea recta, cuya pendiente es $m = -\frac{A}{B}$ y cuyo intercepto con el eje y viene dado por $b = -\frac{C}{B}$ (figura 2.13).

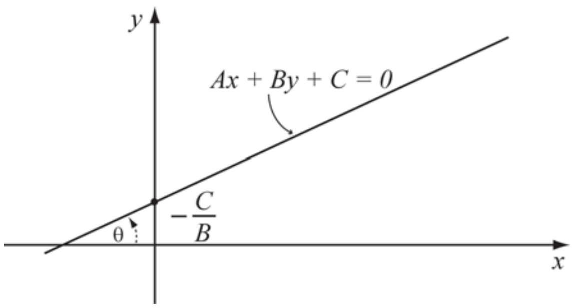


Figura 2.13

Observaciones

i. Es posible escribir la ecuación general de la línea recta en varias formas, de tal manera que sólo involucre dos constantes. Es decir, si A, B y C son todos distintos de cero, podemos escribir la ecuación (1) en las siguientes formas equivalentes:

$$x + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A} = 0. \qquad (1A)$$

$$\frac{A}{B}x + y + \frac{C}{B} = 0. \qquad (1B)$$

$$\frac{A}{C}x+\frac{B}{C}y+1=0. \tag{1C}$$

En cada una de las ecuaciones (1A), (1B) y (1C) existen esencialmente sólo dos constantes independientes, por ejemplo

$$\frac{B}{A} \text{ y } \frac{C}{A} \text{ en (1A).}$$

Esto indica que para determinar la ecuación de una recta en particular necesitamos conocer dos condiciones, como por ejemplo dos puntos, un punto y la pendiente, en concordancia con lo establecido en los numerales anteriores.

ii. Cuando la ecuación de una recta está expresada en la forma general $Ax + By + C = 0$, su pendiente o *coeficiente angular con respecto al eje x*, m, viene dado por $m=-\frac{A}{B}$ y su *coeficiente angular n*, con respecto al eje *y*, viene dado por $n=-\frac{B}{A}$.

Los coeficientes m y n se denominan *coeficientes directores de la recta.*

2.5 Ángulo entre dos rectas. Perpendicularidad y paralelismo entre rectas

Sean l_1 y l_2 dos rectas no verticales, cuyos ángulos de inclinación son θ_1 y θ_2, respectivamente. Al cortarse las rectas l_1 y l_2 forman cuatro ángulos iguales de dos en dos (figura 2.14), esto es, $\beta_1=\beta_2=\theta_1-\theta_2$, y $\alpha_1=\alpha_2=180^0-\beta_1$.

Se define el *ángulo* entre l_1 y l_2 como el ángulo positivo obtenido al rotar la recta l_2 hacia l_1. En este caso el ángulo entre l_1 y l_2 viene dado por

$$\beta_1=\theta_1-\theta_2. \tag{1}$$

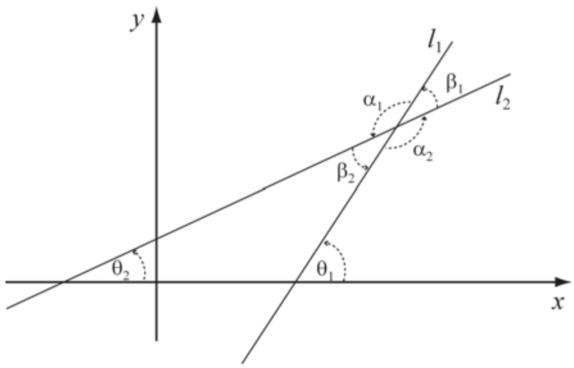


Figura 2.14

El propósito ahora es establecer una relación entre las pendientes de dos rectas y el ángulo entre ellas.

De la igualdad (1) se tiene:

$$\begin{aligned}\tan\beta_1 &= \tan(\theta_1-\theta_2)\\ &= \frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2},\ \beta_1\neq\frac{\pi}{2}.\end{aligned} \qquad (2)$$

También,

$$\begin{aligned}\cot\beta_1 &= \cot(\theta_1-\theta_2)\\ &= \frac{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}{\tan\theta_1-\tan\theta_2},\ \beta_1\neq 0.\end{aligned} \qquad (3)$$

Puesto que $m_1=\tan\theta_1$ y $m_2=\tan\theta_2$, entonces podemos escribir las igualdades (2) y (3) en la forma:

$$\tan\beta_1=\frac{m_1-m_2}{1+m_1\cdot m_2},\ \beta_1\neq\frac{\pi}{2}, \qquad (2)´$$

$$\cot\beta_1=\frac{1+m_1\cdot m_2}{m_1-m_2},\ \beta_1\neq 0. \qquad (3)´$$

Las ecuaciones (2)´ y (3)´ expresan la tangente y la cotangente del ángulo β_1 entre las rectas l_1 y l_2 en términos de sus pendientes, y por medio de ellas se pueden establecer criterios de perpendicularidad y paralelismo entre rectas, como lo afirma el siguiente teorema.

Teorema: Condiciones de perpendicularidad y paralelismo

Sean l_1 y l_2 dos rectas no verticales con pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Entonces:

i. l_1 es paralela $(\|)$ a $l_2 \Leftrightarrow m_1=m_2$.
ii. l_1 es perpendicular $(\perp)$ a $l_2 \Leftrightarrow m_1\cdot m_2=-1$.

Demostración

En la figura 2.15 aparece ilustrada cada una de las situaciones.

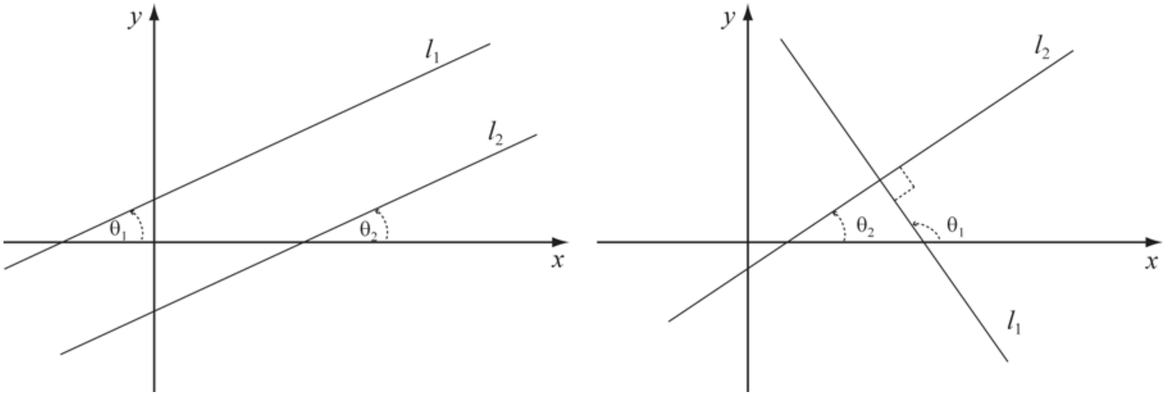


Figura 2.15

i. Suponga que $l_1 \parallel l_2$, y veamos que $m_1 = m_2$.

En efecto, como $l_1 \parallel l_2$, entonces los ángulos θ_1 y θ_2 son iguales por correspondientes, y en consecuencia $\tan\theta_1 = \tan\theta_2$, es decir, $m_1 = m_2$.

Ahora, si $m_1 = m_2$, se sigue de (2)' que $\tan\beta_1 = 0$, y de aquí $\beta_1 = \theta_1 - \theta_2 = 0$, de donde $\theta_1 = \theta_2$ y por tanto l_1 y l_2 son paralelas.

ii. Si l_1 y l_2 son perpendiculares, entonces $\beta_1 = \dfrac{\pi}{2}$ y $\cot\beta_1 = \cot\dfrac{\pi}{2} = 0.$ Sustituyendo este último valor en (3)´ obtenemos $0 = \dfrac{1 + m_1 \cdot m_2}{m_1 - m_2}$, de donde $m_1 \cdot m_2 + 1 = 0$, y de aquí se deduce que $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Recíprocamente, si $m_1 \cdot m_2 = -1$, entonces $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$, y como $m_2 = \tan\theta_2$, y $m_1 = \tan\theta_1$, se tiene que $\tan\theta_1 = -\dfrac{1}{\tan\theta_2} = -\cot\theta_2$, de donde, sin pérdida de generalidad, hemos escogido la recta l_1 con mayor inclinación θ_1. Teniendo en cuenta que tanto θ_1 como θ_2 son ángulos positivos y menores que 180º, concluimos que $\theta_1 = 90º + \theta_2$, de lo cual $\theta_1 - \theta_2 = 90º$ y por tanto las rectas l_1 y l_2 son perpendiculares.

Observaciones

i. Si las rectas l_1 y l_2 están dadas por las ecuaciones en forma general $Ax + By + C = 0$ y $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, puesto que $m_1 = -\dfrac{A}{B}$ y $m_2 = -\dfrac{A_1}{B_1}$, entonces las condiciones de paralelismo y perpendicularidad del teorema pueden enunciarse en la siguiente forma:

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow -\frac{A}{B} = -\frac{A_1}{B_1} \Leftrightarrow \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} \Leftrightarrow AB_1 - A_1 B = 0.$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \left(-\frac{A}{B}\right)\left(-\frac{A_1}{B_1}\right) = -1 \Leftrightarrow A \cdot A_1 = -B \cdot B_1 \Leftrightarrow A \cdot A_1 + B \cdot B_1 = 0.$$

ii. Un caso especial del paralelismo entre rectas es la coincidencia. Una condición necesaria y suficiente para que dos rectas l_1 y l_2 sean coincidentes es la proporcionalidad entre sus coeficientes. Es decir, las rectas de ecuaciones $Ax + By + C = 0$ y $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ son coincidentes.

$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C} \Leftrightarrow A_1 = kA,\ B_1 = kB,\ C_1 = kC.$$

Distancia de un punto a una recta

- **Teorema**

Sea $P(x_1,\ y_1)$ un punto que no pertenece a la recta l de ecuación $Ax + By + C = 0$ (figura 2.16). La distancia d del punto P a la recta l viene dada por medio de la fórmula

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

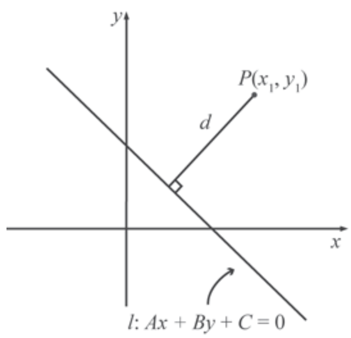


Figura 2.16

Demostración

Vea el ejemplo 19 de los ejercicios resueltos al final del capítulo.

Se recomienda a los estudiantes lectores mirar los ejemplos resueltos y desarrollar los ejercicios propuestos al final de este capítulo.

Módulo 3

Funciones y sus gráficas

Peter Dirichlet

Peter Dirichlet nació en Alemania el 13 de febrero de 1805 y murió en 1859.

Fuente:
http://images.google.com.co

Introducción

Quizás la idea central en la matemática sea el concepto de *función*. En la historia de la matemática parece ser René Descartes quien introdujo primeramente en el año 1637 el concepto de función, para significar la potencia entera de la variable x. Posteriormente Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) utilizó dicho concepto para denotar las cantidades asociadas a una curva. Leonhard Euler (1706-1783) lo utilizó luego para identificar la relación entre variable y constantes en una fórmula. Pero la definición que se usa actualmente de función es debida a Peter Dirichlet (1805-1859), la cual describe una función como una regla de correspondencia entre dos conjuntos.

Objetivos

1. Conocer los diferentes tipos de funciones y las operaciones básicas entre ellas.
2. Diferenciar gráficamente entre una relación y una función.
3. Construir a partir de una gráfica dada, usando desplazamientos y reducciones, las gráficas de muchas otras funciones.

Preguntas básicas

1. Sea $f(x) = \dfrac{mx+n}{px+q}$.

   Determine $f^{-1}(x)$. Si $p \neq 0$, ¿qué condiciones cumplen m, n, p y q para que $f = f^{-1}$?
2. Si la gráfica de f corta a la de f^{-1}, ¿debe ocurrir esto sobre la recta $y = x$?

Contenido

3.6 Desplazamientos, compresiones y alargamientos
3.7 Operaciones con funciones
3.8 Clasificación de las funciones
   3.8.1 Funciones monótonas
   3.8.2 Funciones inyectivas
3.9 Funciones inversas
3.10 Modelos matemáticos: construcción de funciones

3.1 Generalidades

Intuitivamente se considera que la cantidad y es *función* de la cantidad x si existe alguna regla, ley o procedimiento que permita asignar un *valor único* de y *para cada* valor que se considere de x, dentro de cierto conjunto posible de valores.

Muchas veces es posible expresar dicha regla o ley por medio de una ecuación matemática, como ocurre por ejemplo con el área y de un círculo, en función del radio x, $y = \pi x^2$; otras veces es difícil o aun imposible hallar la fórmula matemática que relaciona las variables x e y aunque siga siendo posible la asignación de un valor único de y para cada valor de x.

Lo que interesa realmente es poder determinar un conjunto de pares ordenados (x, y), independientemente de si la ley o regla que relaciona las variables x e y es de tipo matemático, empírica o simplemente descriptiva.

Definiciones

i. Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Una *función de A en B* es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento x de A un único elemento y de B.

Se usan indistintamente los símbolos

$$\begin{array}{ll} f : A \to B & \qquad A \xrightarrow{f} B \\ x \to y = f(x) & \qquad x \mapsto y = f(x) \end{array}$$

para expresar que «f» es una función de A en B y que además al elemento x de A le corresponde el elemento y (imagen de x mediante f) de B.

ii. Al conjunto A se le llama *dominio de la función* y se denotará por el símbolo $D(f)$.

Igualmente, al subconjunto de B, formado por todas las imágenes de los elementos de A, se le llama *rango de la función* y se denotará por el símbolo $r(f)$.

Observaciones

i. Para los conceptos del cálculo que se desarrollan, los conjuntos A y B mencionados anteriormente son por lo general subconjuntos de $\Re$; de esta forma, la función

$f : A \subset \Re \to B \subset \Re$ se llamará *función real de variable real*.

ii. En la expresión $y = f(x)$ que expresa la correspondencia entre los elementos x de A con los y de B, la letra x se llama *variable independiente* y la letra y se denomina *variable dependiente*.

En el siguiente ejemplo se ilustran los conceptos establecidos hasta ahora.

Considere los conjuntos $A=\{a, b, c, d, e\}$ y $B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, y la función $f : A \to B$ definida por medio del diagrama de la figura 3.1:

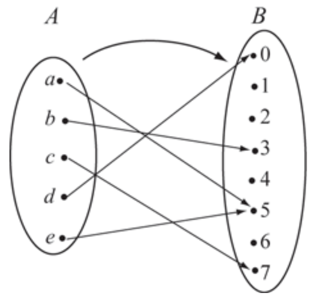


Figura 3.1

Se tiene entonces que:

La imagen del elemento $\underline{a}$ mediante f es $\underline{5}$. Es decir, $f(a) = 5$.
La imagen del elemento $\underline{b}$ mediante f es $\underline{3}$. Es decir, $f(b) = 3$.
La imagen del elemento $\underline{c}$ mediante f es $\underline{7}$. Es decir, $f(c) = 7$.
La imagen del elemento $\underline{d}$ mediante f es $\underline{0}$. Es decir, $f(d) = 0$.
La imagen del elemento $\underline{e}$ mediante f es $\underline{5}$. Es decir, $f(e) = 5$.

Ahora,

$$D(f) = A = \{a, b, c, d, e\},$$

$$r(f) = \{0, 3, 5, 7\} \subset B.$$

En lo sucesivo, cuando no se mencionen los conjuntos *A* y *B* de una función sino solamente la regla o correspondencia entre sus elementos, se entenderá que tanto *A* como *B* son subconjuntos de números reales. En este caso se dice que el dominio es el conjunto de números reales para los cuales tiene sentido la «regla» o «correspondencia», o más precisamente, los valores para los cuales $f(x)$ es un número real.

Más adelante se ilustrará la manera de proceder en estos casos.

3.2 Gráfica de una función

En las aplicaciones es frecuente que una gráfica muestre con mayor claridad que una ecuación o una tabla la relación que existe entre las variables de una función. Las ecuaciones y tablas que corresponden a una función por lo general requieren algunos cálculos e interpretaciones, antes de poder ver con claridad todo tipo de información contenida en ellas.

Cuando la regla que define una función *f* está dada mediante una ecuación que relaciona las variables *x* e *y*, la *gráfica de f* es la *gráfica de la ecuación*, es decir, el conjunto de puntos (*x, y*) del plano cartesiano que satisfacen la ecuación. Más precisamente:

Definición

Sea $f : A \subset \Re \to B \subset \Re$ una *función real de variable real*. La *gráfica de f* es el conjunto de puntos $(x, y) \in \Re^2$ tales que la pareja ordenada (x, y) pertenece a f. Es decir,

$$\text{gráfica de } f = \{(x, y) \in \Re^2 : y = f(x),\ \ x \in D(f)\}.$$

Observación

La restricción dada en la definición de función de que no existen dos parejas distintas que tengan la primera componente igual se traduce en la gráfica de la función de la siguiente manera: ninguna recta vertical puede cortar su gráfica en más de un punto (*criterio de la recta vertical*).

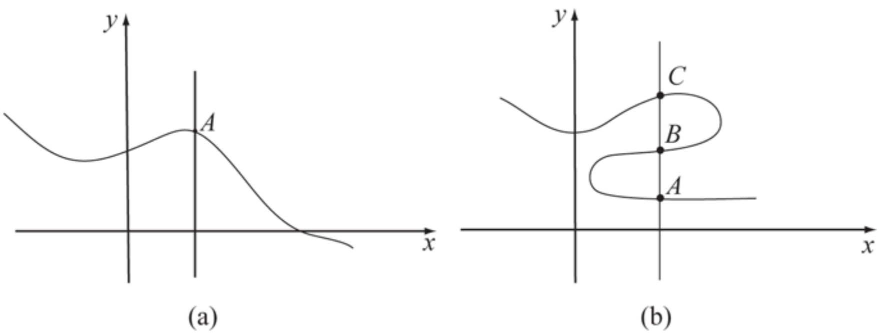


Figura 3.2

Así por ejemplo, la gráfica de la figura 3.2*a* corresponde a la gráfica de una función (la recta vertical sólo corta la gráfica en el punto *A*), mientras que la figura 3.2*b* no corresponde a la gráfica de una función. Nótese que la recta vertical corta la gráfica en más de un punto: *A, B* y *C.*

En el capítulo 4 del texto se trazarán las gráficas de muchas funciones, definiendo y especificando otros elementos teóricos útiles (asíntotas, máximos, mínimos, concavidad) que permitirán ver con mayor claridad la relación entre las variables x e y de una función $y = f(x)$.

3.2.1 Algunas funciones especiales

A continuación se describen algunas funciones especiales y los nombres con que se les conoce en el lenguaje matemático. Además se muestra una gráfica aproximada de cada una de ellas.

i. **Función exponencial de base *a*** (figura 3.3)

$$f : \Re \to \Re^+,$$

$$x \mapsto y = f(x) = a^x,\ \ a > 0,\ a \neq 1.$$

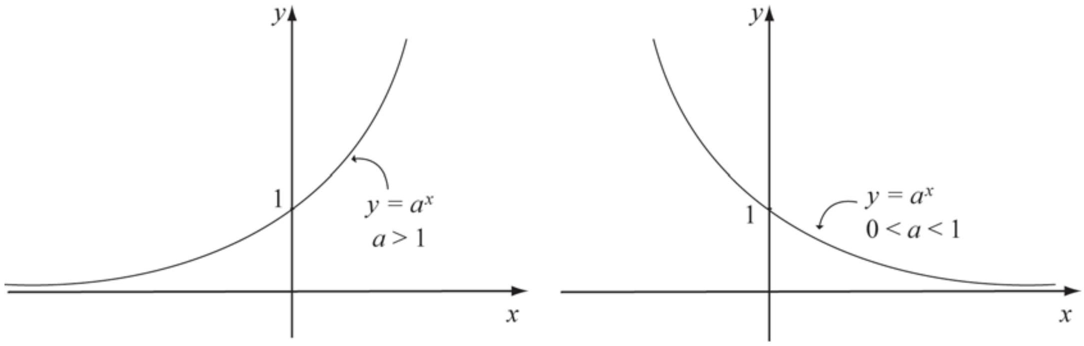


Figura 3.3

ii. **Función logarítmica de base *a*** (figura 3.4)

$$f : \Re^{+} \rightarrow \Re,$$
$$x \mapsto y = f(x) = \log_a x, \;\; a > 0, \; a \neq 1.$$

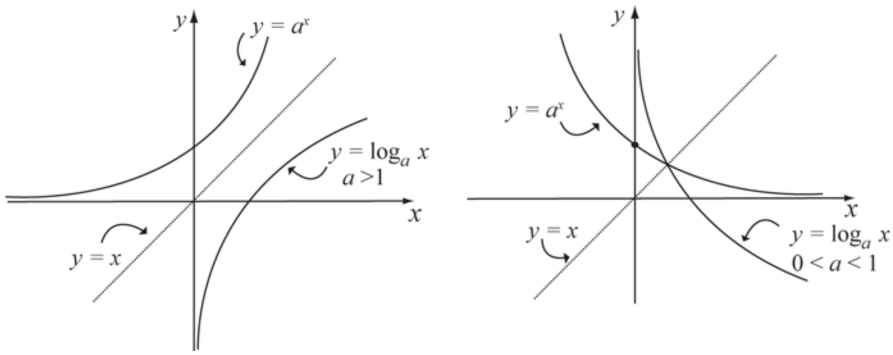


Figura 3.4

iii. **Función lineal** (figura 3.5)

$$f : \Re \rightarrow \Re,$$
$$x \mapsto y = f(x) = mx + b,$$

que corresponde a la línea recta de pendiente *m* e intercepto *b* con el *eje y*.

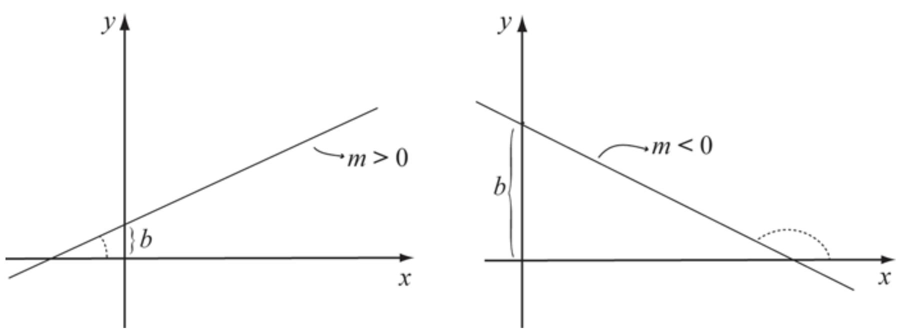


Figura 3.5

iv. **Función cuadrática** (figura 3.6)

$$f:\Re\to\Re,$$
$$x\mapsto y=f(x)=ax^2+bx+c,$$

donde $a,\ b,\ c\in\Re$ y corresponde a una parábola abierta hacia arriba o hacia abajo según el signo de la constante a.

En la figura 3.6 aparece la gráfica de la parábola $y = ax^2 + bx + c$, de acuerdo al signo de a. Igualmente, como caso particular, se ha trazado la curva $y = x^2$ (figura 3.6*c*).

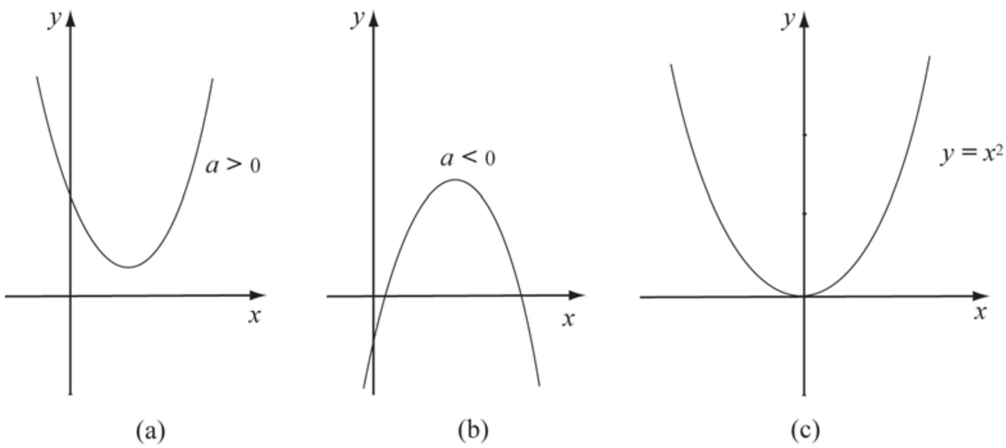
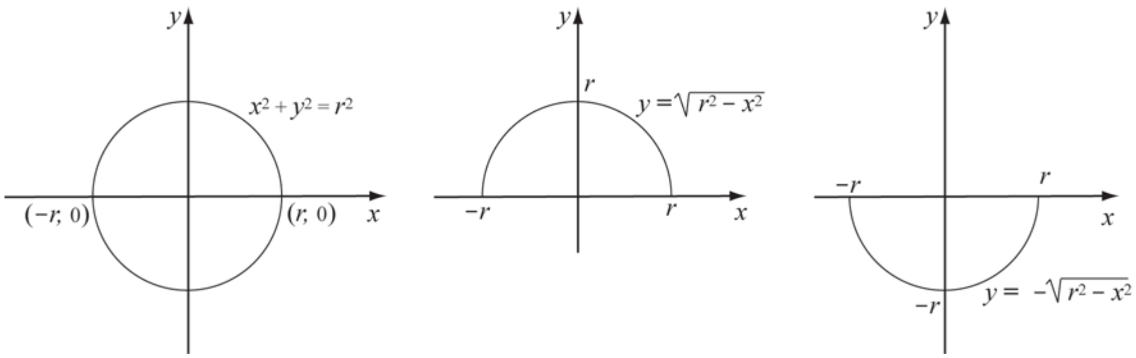


Figura 3.6

v. **Ramas de circunferencia** (figura 3.7)

La ecuación en forma implícita $x^2 + y^2 = r^2$, que corresponde a una circunferencia centrada en el origen y radio r, y cuya gráfica no es una función (criterio de la recta vertical), genera, sin embargo, dos funciones llamadas ramas de circunferencia y cuyas definiciones y gráficas se describen a continuación:



$x^2 + y^2 = r^2$

$f : [-r, r] \to \Re$

$x \mapsto y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

Rama superior de la circunferencia

$f : [-r, r] \to \Re$

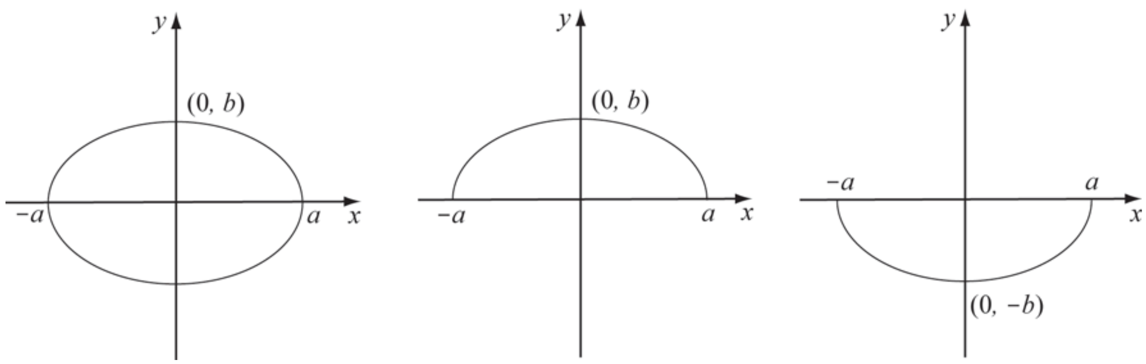
$x \mapsto y = f(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$

Rama inferior de la circunferencia

Figura 3.7

vi. **Ramas de elipse** (figura 3.8)

La ecuación en forma implícita $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a, b \in \Re$, y $a > b$, corresponde a una elipse centrada en el origen, eje mayor $2a$ y cuya gráfica no es una función (criterio de la recta vertical) y genera dos funciones llamadas ramas de elipse, cuyas definiciones y gráficas se describen a continuación:



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$f : [-a, a] \to \Re$

$x \mapsto y = f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

Rama superior de la elipse

$f : [-a, a] \to \Re$

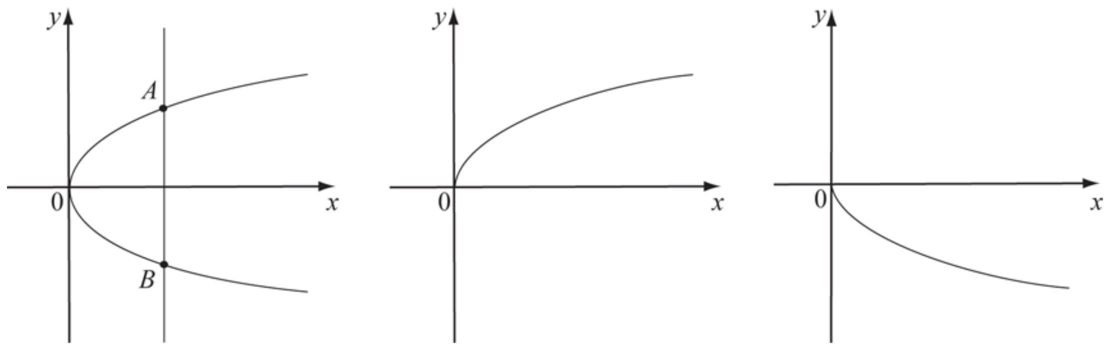
$x \mapsto y = f(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

Rama inferior de la elipse

Figura 3.8

vii. **Ramas de parábola** (figura 3.9)

La ecuación en forma implícita $y^2 = x$ corresponde a una parábola abierta hacia el eje x positivo y cuyo vértice y foco son respectivamente los puntos $V(0, 0)$ y $F(1/2, 0)$. Su gráfica no es una función (criterio de la recta vertical); sin embargo, genera dos funciones llamadas ramas de parábola, cuyas definiciones y gráficas se describen a continuación:



$y^2 = x$

$f : \Re^+ \cup \{0\} \to \Re$

$x \mapsto y = f(x) = \sqrt{x}$

Rama superior de la parábola

$f : \Re^+ \cup \{0\} \to \Re$

$x \mapsto y = f(x) = -\sqrt{x}$

Rama inferior de la parábola

Figura 3.9

viii. La ecuación en forma implícita $x \cdot y = 1$ corresponde a una curva llamada *hipérbola equilátera* y genera la función

f: $\Re - \{0\} \to \Re$,

$x \mapsto y = f(x) = \dfrac{1}{x}$,

cuya gráfica aparece en la figura 3.10.

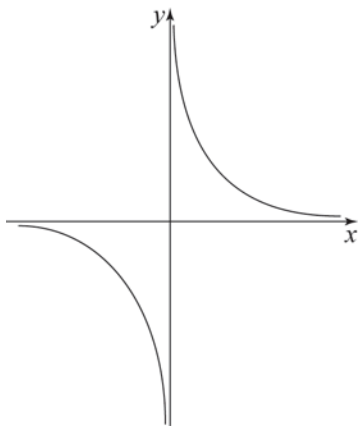


Figura 3.10

ix. Función polinómica de grado *n*

$f : \Re \to \Re,$

$x \to y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$

en donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales.

Casos particulares

1. La función definida por $y = f(x) = a_0$ (a_0 una constante) se llama *función constante* y su gráfica corresponde a una recta paralela al eje x, a_0 unidades por encima o por debajo del eje x (figura 3.11) según el signo de a_0.

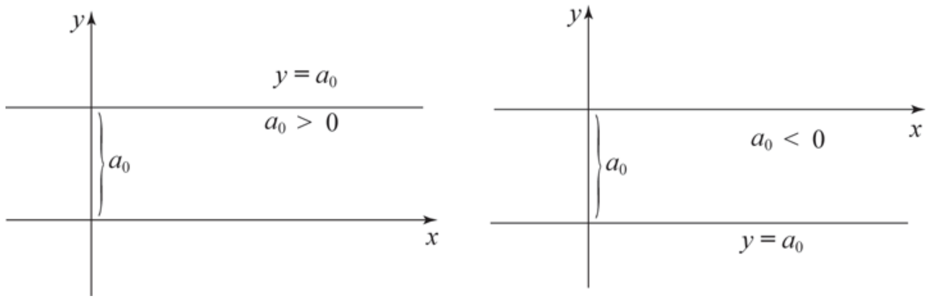


Figura 3.11

2. La función definida por $y = f(x) = a_0 + a_1 x$ se llama *función lineal* (ver *iii*).

3. La función definida por $y = f(x) = x$ se llama *función identidad* y su gráfica corresponde a una recta que pasa por el origen formando un ángulo de 45º con el semieje positivo x (figura 3.12).

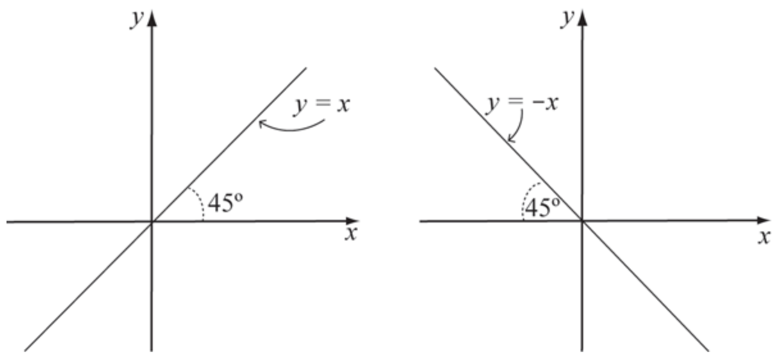


Figura 3.12

4. La función definida por $y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ se llama *función cuadrática* (ver *iv*).

5. La función definida por $y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ se llama *función cúbica*. Entre estas cúbicas se destaca una por el uso que se hace de ella en las aplicaciones. Se trata de la función $y = f(x) = x^3$, llamada *parábola cúbica*, cuya gráfica aparece en la figura 3.13.

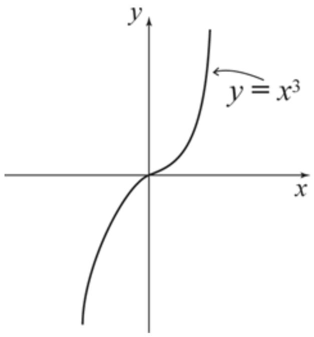


Figura 3.13

x. Función mayor entero menor o igual a *x*

$f : \Re \to \mathbb{Z}.$

$x \mapsto y = f(x) = [\![x]\!] = n,$

en donde n es un número entero tal que $n \leq x < n+1.$

La expresión $[\![x]\!]$ se lee: «mayor entero que no supera a *x*».

Así, para $x = 0.85, [\![x]\!] = [\![0.85]\!] = 0.$

También, $[\![1.35]\!] = 1,\ [\![-2.4]\!] = -3.$

La gráfica de la función se muestra en la figura 3.14 y está constituida por una serie de segmentos unitarios, faltándole a cada uno su extremo derecho.

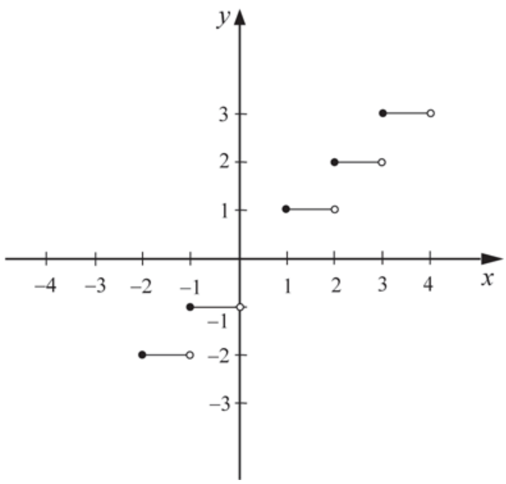


Figura 3.14

xi. Función definida a tramos

$f : A \subset \Re \to \Re,$

$$x \mapsto y = f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in D_1 \\ f_2(x) & \text{si } x \in D_2 \\ . \\ . \\ . \\ f_n(x) & \text{si } x \in D_n \end{cases}$$

en donde $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup ... \cup D_n = A$ (dominio de *f*).

Casos particulares

1. Función valor absoluto

$f : \Re \to \Re^+ \cup \{0\},$

$$x \mapsto y = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La gráfica de la función valor absoluto está formada por las rectas perpendiculares $y = x$ e $y = -x$ (figura 3.15).

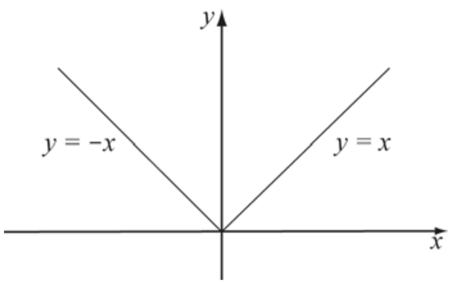


Figura 3.15

2. **Función signo**

$f : \Re \to \{-1, 0, 1\}$

$$x \mapsto y = f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Su gráfica se muestra en la figura 3.16 y está constituida por el origen de coordenadas y dos semirrectas a las cuales les falta el punto inicial.

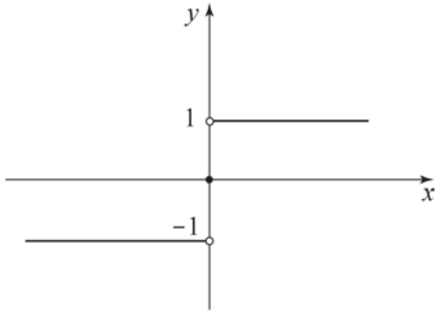


Figura 3.16

Note que el dominio es el conjunto $\Re$, mientras que el rango es el conjunto $\{-1, 0, 1\}$.

3. Función escalón unitario o función de Heaviside

Una función a tramos, muy importante en las aplicaciones prácticas a las ecuaciones diferenciales (así por ejemplo, un impulso unitario en un sistema de control mecánico), se conoce como la función *escalón unitario* o función *Heaviside* y está definida así:

$$H(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t > a \end{cases}$$

donde a es una constante fija.

La gráfica de la función $H(t-a)$ aparece en la figura 3.17*a*.

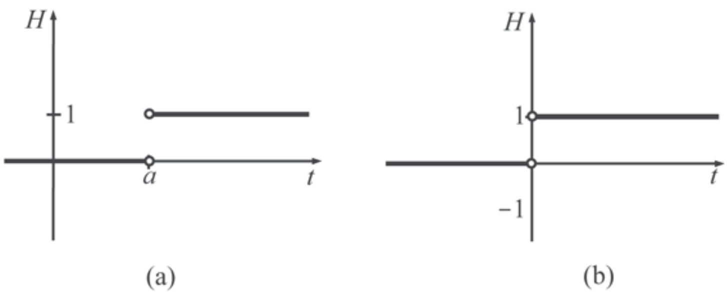


Figura 3.17

En particular, cuando $a = 0$,

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

y su gráfica aparece en la figura 3.17*b*.

xii. Función racional

$$f:\Re\to\Re,$$
$$x\mapsto y=f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

en donde $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son polinomios de grados n y m, respectivamente.

Nótese que el dominio de una función racional f viene dado por

$$D(f)=\{x\in\Re: Q_m(x)\neq 0\}=\Re-\{x\in\Re: Q_m(x)=0\}.$$

Es decir, el dominio f lo constituye el conjunto de los números reales, excepto los valores que anulan el denominador.

3.3 Funciones algebraicas y trascendentes

Una *función algebraica explícita* es aquella cuya variable y se obtiene combinando un número finito de veces la variable x y constantes reales por medio de operaciones algebraicas de suma, resta, multiplicación, división, elevación a potencias y extracción de raíces.

Un ejemplo de una función algebraica explícita es aquella para la cual la regla de correspondencia viene dada por

$$y=\frac{(\sqrt{x}+5)^3}{(x^{2/3}+3)}.$$

Se llama *función trascendente* aquella cuya variable y contiene expresiones trigonométricas, exponenciales o logarítmicas. Ejemplos de funciones trascendentes son las siguientes:

$$y=e^x+\operatorname{sen} x.$$
$$y=3^x.$$
$$y=\log_2 x+5.$$

3.4 Funciones pares e impares

Definiciones

i. Una función f *es par* si los números x y $-x$ están en su dominio y además

$$f(-x)=f(x).$$

ii. Una función f *es impar* si los números x y $-x$ están en su dominio y además

$$f(-x)=-f(x).$$

Observaciones

i. Es evidente desde el punto de vista geométrico que la gráfica de una función par es *simétrica* con respecto al eje *y* (figura 3.18).

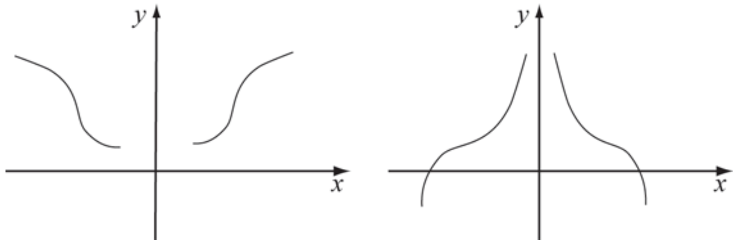


Figura 3.18

También es evidente que toda función racional que sólo contiene potencias pares (x^0, x^2, x^4, ...) de la variable *x*, es *par*.

Así, la función $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$ es *par*.

ii. Igualmente, la gráfica de una función impar es *simétrica* con respecto al origen (figura 3.19).

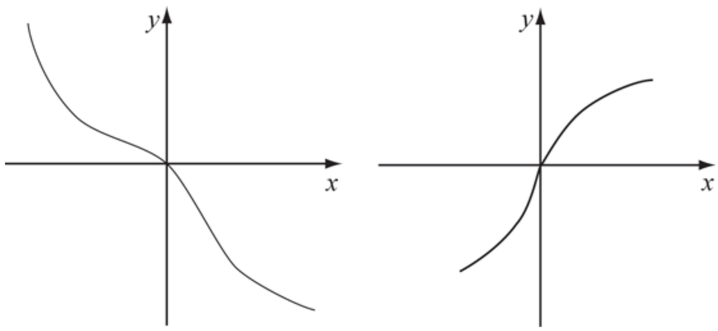


Figura 3.19

3.5 Funciones periódicas

Definición

Una función es *periódica* con periodo $P \neq 0$ si su dominio contiene al número $(x + P)$ siempre que contenga a *x*, y si además

$$f(x + P) = f(x) \text{ para todo } x \in D(f).$$

El mínimo número positivo *P* con esta propiedad se denomina *periodo primitivo de f*.

La definición anterior significa, geométricamente, que para cualquier $a \in D(f)$ la gráfica entre *a* y $(a + P)$ es exactamente igual a la gráfica entre $(a + P)$ y $(a + 2P)$, y así sucesivamente (figura 3.20).

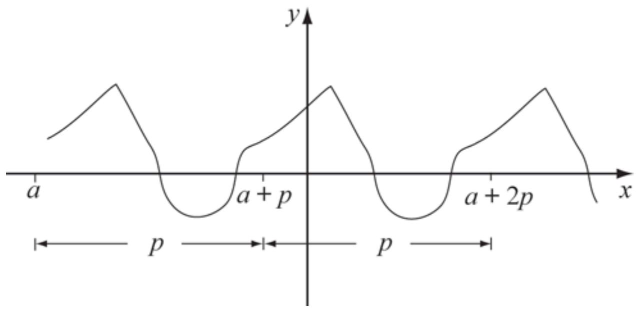


Figura 3.20

Son ejemplos de funciones periódicas:

1. Las funciones trigonométricas: seno, coseno, secante y cosecante, que tienen periodo $P = 2\pi$, mientras que las funciones tangente y cotangente tienen periodo $P = \pi$.

   En efecto,

   Si $f(x) = \text{sen}\, x$, entonces $f(x + 2\pi) = \text{sen}\,(x + 2\pi) = \text{sen}\, x = f(x)$.
   Si $g(x) = \cos x$, entonces $g(x + 2\pi) = \cos\,(x + 2\pi) = \cos x = g(x)$.
   Si $h(x) = \tan x$, entonces $h(x + \pi) = \tan\,(x + \pi) = \tan x = h(x)$.

   En la figura 3.21 aparecen las gráficas de las funciones trigonométricas en las cuales se indica el periodo correspondiente.

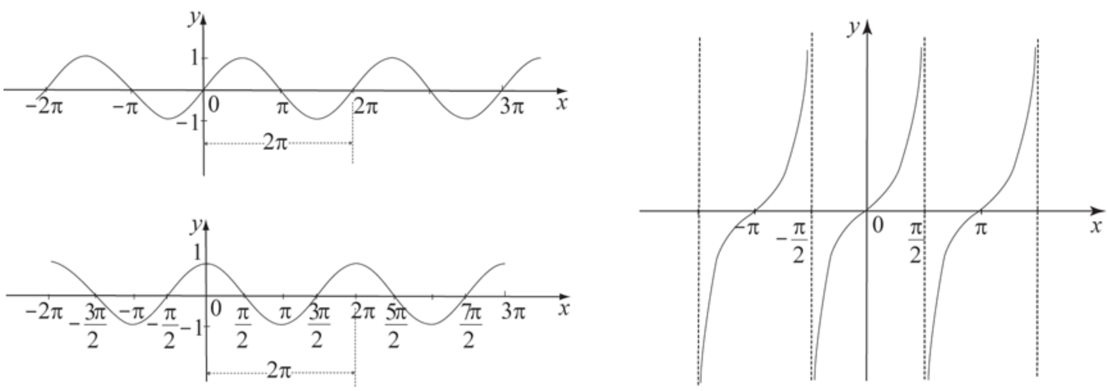


Figura 3.21

2. La función constante (sección 3.1.1) $f(x) = k$ es una función periódica, puesto que para cualquier número P, $f(x + P) = k = f(x)$.

   Nótese, sin embargo, que esta función carece de periodo primitivo.

3.6 Desplazamientos, compresiones y alargamientos

A partir de la gráfica de una función, las técnicas de graficación, por medio de los desplazamientos (horizontales y verticales), compresiones y alargamientos, permiten obtener las gráficas de muchas otras funciones. En esta sección definiremos cada una de ellas y las ilustraremos con algunos ejemplos.

Definición

Considere la gráfica de una función $y = f(x)$. Entonces, la gráfica de la nueva función $y = f(x) + c$ es la gráfica de f con un *desplazamiento vertical hacia arriba* (si $c > 0$) o *hacia abajo* (si $c < 0$).

Ejemplo 3.1

Use la gráfica de la función $y = f(x) = x^2$ para obtener la gráfica de las funciones $h(x) = x^2 + 2$ y $t(x) = x^2 - 3$.

Solución

La gráfica de la función $y = f(x) = x^2$ corresponde a una parábola abierta hacia arriba y cuyo vértice es el origen de coordenadas (figura 3.22).

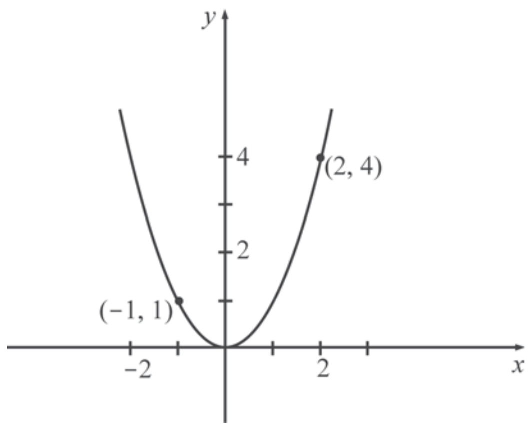


Figura 3.22

Ahora,

$$h(x) = x^2 + 2 = f(x) + 2.$$

Es decir, la gráfica de $h(x)$ es la gráfica de $f(x)$ con un desplazamiento vertical de 2 unidades hacia arriba (figura 3.23*a*).

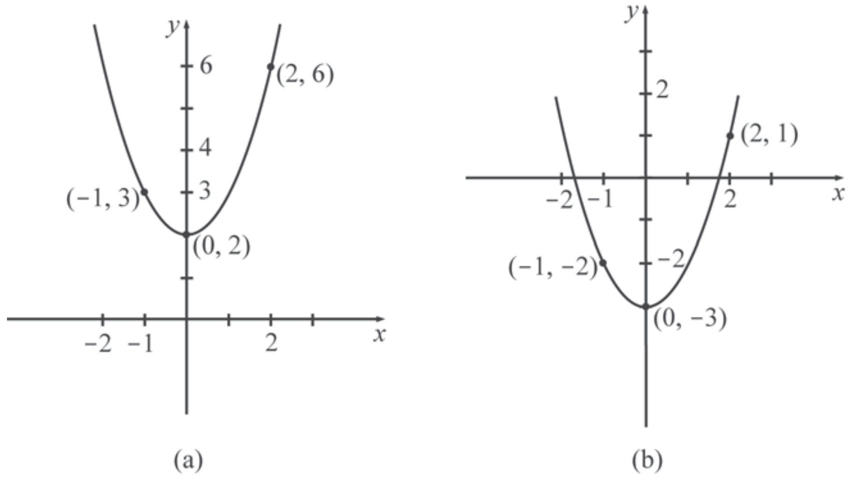


Figura 3.23

Nótese que, en particular, las ordenadas de los puntos $(-1,\ 1),\ (0,\ 0)$ y (2, 4) de la figura 3.22 sufren un desplazamiento vertical de 2 unidades hacia arriba.

Igualmente, $t(x) = x^2 - 3 = f(x) - 3$, lo que indica que la gráfica de $t(x)$ es la gráfica de $f(x)$ con un desplazamiento vertical de 3 unidades hacia abajo (figura 3.23*b*).

Note el desplazamiento que sufren las ordenadas de los puntos $(-1,\ 1), (0,\ 0)$ y $(2,\ 4)$ de la figura 3.22.

Definición

Considere la gráfica de una función $y = f(x)$. Entonces, la gráfica de la nueva función $g(x) = f(x+c)$ es la gráfica de f con un *desplazamiento horizontal hacia la derecha* (si $c < 0$) o *hacia la izquierda* (si $c > 0$).

Ejemplo 3.2

Use la gráfica de la función $y = f(x) = \sqrt{x}$ para obtener la gráfica de las funciones $g(x) = \sqrt{x+2}$ y $h(x) = \sqrt{x-3}$.

Solución

La gráfica de la función $y = f(x) = \sqrt{x}$ corresponde a la rama superior de una parábola abierta hacia la derecha (figura 3.24).

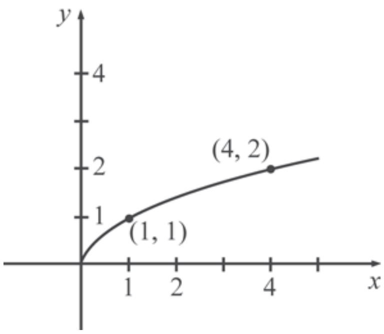


Figura 3.24

Como $g(x) = \sqrt{x+2} = f(x+2)$, entonces la gráfica de $g(x)$ es la gráfica de $f(x)$ con un desplazamiento hacia la izquierda de 2 unidades (figura 3.25*a*).

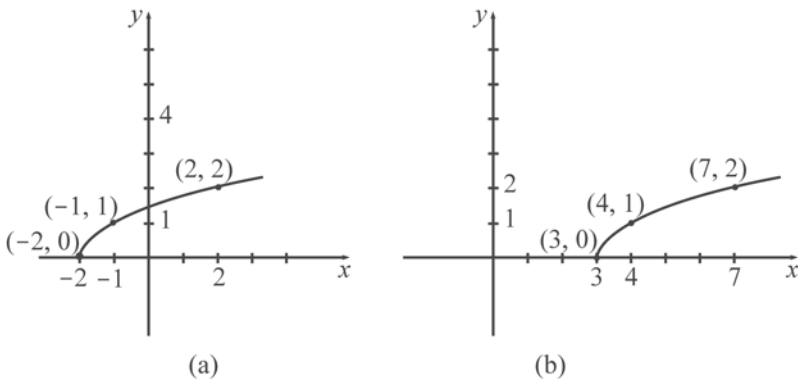


Figura 3.25

Nótese que en este caso, en particular, las abscisas de los puntos (0, 0), (1, 1) y (4, 2), de la figura 3.24, sufren un desplazamiento horizontal de 2 unidades hacia la izquierda.

También, $h(x) = \sqrt{x-3} = f(x-3)$.

La igualdad anterior indica que la gráfica de $h(x)$ es la gráfica de $f(x)$ con un desplazamiento horizontal de 3 unidades hacia la derecha (figura 3.25*b*).

Nótese también que en este caso las abscisas de los puntos (0, 0), (1, 1) y (4, 2), de la figura 3.24, sufren un desplazamiento horizontal de 3 unidades hacia la derecha.

Ejemplo 3.3

Trace la gráfica de la función $g(x) = |x+1| - 3$.

Solución

Obsérvese en primer lugar que la base fundamental para la gráfica de la función pedida es $f(x) = |x|$, cuya gráfica aparece en la figura 3.26.

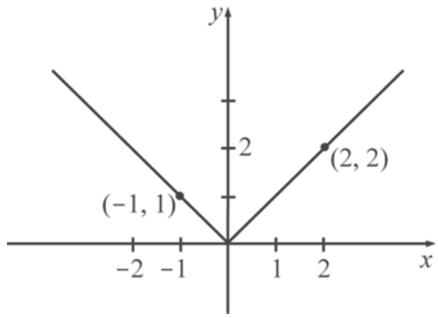


Figura 3.26

Ahora, la gráfica de $y = |x+1|$ es la gráfica de $f(x) = |x|$ con un desplazamiento horizontal hacia la izquierda de 1 unidad (figura 3.27*a*).

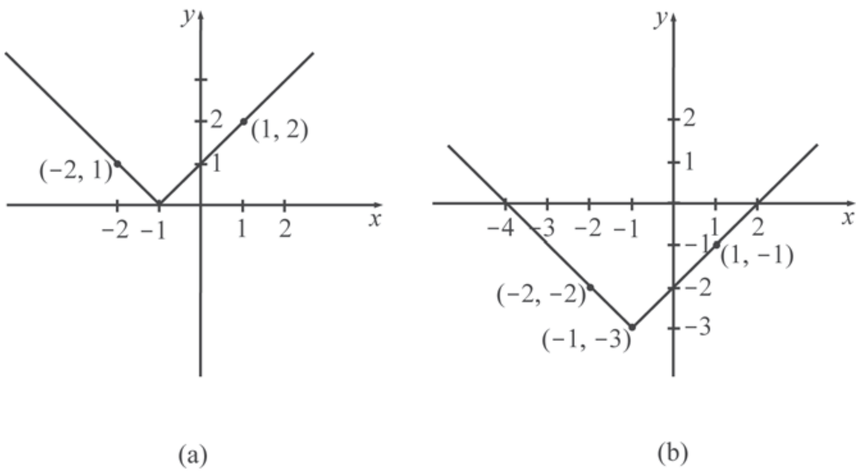


Figura 3.27

Finalmente, para obtener la gráfica de $g(x) = |x+1| - 3$ recorremos la gráfica de $y = |x+1|$, 3 unidades hacia abajo en forma vertical (figura 3.27*b*).

Definición

Considere la gráfica de una función $y = f(x)$ y sea k una constante positiva. Entonces, la gráfica de la nueva función $y = k\,f(x)$ es una *compresión* (si $0 < k < 1$) o un *alargamiento vertical* (si $k > 1$) de la gráfica de $y = f(x)$.

Ejemplo 3.4

En la figura 3.28 aparece la gráfica de una función $y = f(x)$ definida en el intervalo $[-4, 4)$.

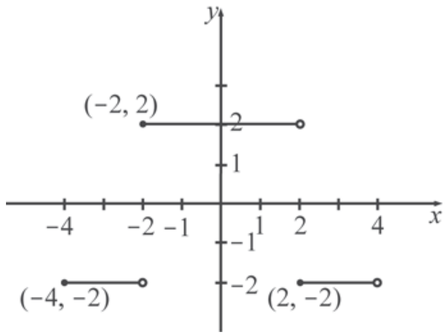


Figura 3.28

A partir de la gráfica de $y = f(x)$, obtenga las gráficas de $y = \frac{1}{2} f(x)$ y de $y = 3f(x)$.

Solución

De acuerdo a la definición anterior, la gráfica de la función $y = \frac{1}{2} f(x)$ corresponde a una *reducción* o *compresión vertical* de la gráfica de $y = f(x)$.

Nótese que, en particular, las ordenadas de los puntos $(-4, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, -2)$ de la gráfica de *f* se reducen a la mitad en la gráfica de $y = \frac{1}{2} f(x)$ (figura 3.29*a*).

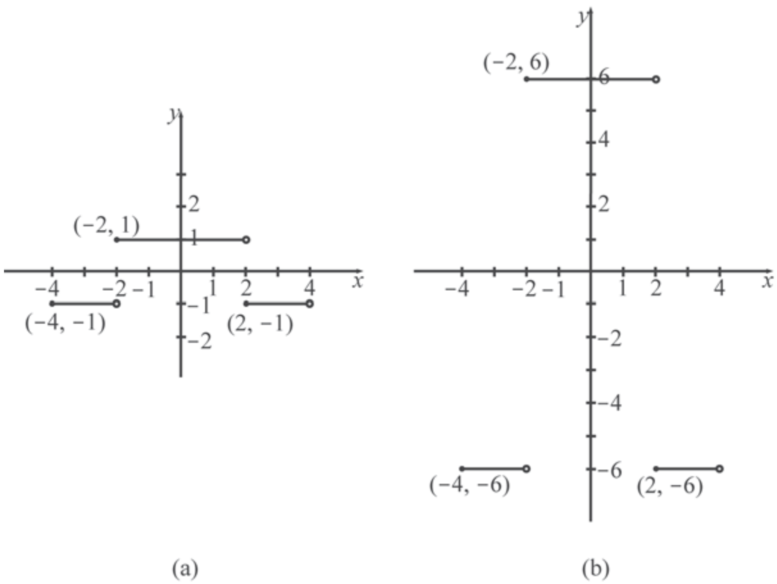


Figura 3.29

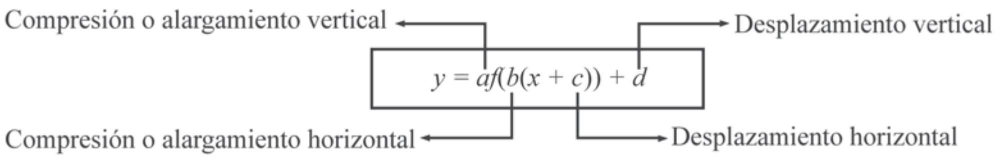
Igualmente, la gráfica de la función $y = 3f(x)$ corresponde, de acuerdo a la definición anterior, a un *alargamiento vertical* de la gráfica de $y = f(x)$.

Nótese que, en particular, las ordenadas de los puntos $(-4,-2)$, $(-2,2)$ y $(2,-2)$ en la gráfica de *f* se *triplican* en la gráfica de $y = 3f(x)$ (figura 3.29*b*).

Observaciones:

i. Las reglas mencionadas anteriormente para desplazar, agrandar o reducir la gráfica de una función se pueden aplicar a cualquier función; sin embargo, quedan elementos básicos de la graficación que no han sido considerados (asíntotas, máximos y mínimos, concavidad, etc.) y que sólo las herramientas del cálculo nos las proporcionan y serán desarrolladas en el capítulo 4.

ii. A manera de resumen, el siguiente diagrama le ayudará a recordar los parámetros de control con respecto a la gráfica dada de una función $y = f(x)$.



3.7 Operaciones con funciones

Definición

Sean *f*, *g* dos funciones reales de variable real. Entonces se pueden definir las siguientes operaciones:

i. Suma $(f+g)(x) = f(x)+g(x).$

ii. Diferencia $(f-g)(x) = f(x)-g(x).$

iii. Producto $(f \cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x).$

iv. Cociente $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}.$

Nota: en cada uno de los casos anteriores, el dominio de la función resultante es la intersección de los dominios de *f* y *g*. En el caso particular del cociente se deben excluir de la intersección los valores de *x* que anulen el denominador *g*.

v. Composición de funciones

Bajo ciertas condiciones es posible definir a partir de dos funciones *f* y *g* una nueva función llamada la «compuesta de *f* y *g*».

Sean $f: A \to B$ y $g: B \to C$ dos funciones donde coincide el dominio de la segunda con el codominio de la primera. Aunque sólo es suficiente que únicamente sea una parte de él, es decir, $B \subset B^*$ (figura 3.30).

El propósito es asignar a cada elemento de *A* un único elemento de *C*, y el camino natural consiste en determinar la imagen de cualquier $x \in A$ mediante *f*, y luego obtener la imagen de $f(x) \in B$ mediante *g*.

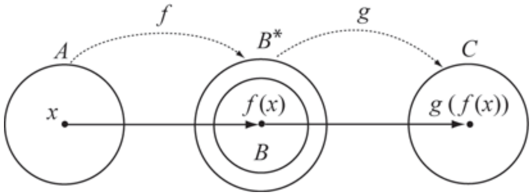


Figura 3.30

Definición

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones. La *composición* de las funciones f y g, denotada por $(g \circ f)$, es la función:

$$g \circ f : A \to C,$$
$$x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Así por ejemplo, si f y g son las funciones definidas por

$$f(x) = \frac{x-3}{2} \text{ y } g(x) = \sqrt{x},$$

entonces,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\frac{x-3}{2}},$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)-3}{2} = \frac{\sqrt{x}-3}{2}.$$

Del ejemplo anterior se deduce fácilmente que en general

$$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x).$$

Se debe tener también cuidado con los dominios de $g \circ f$ y de $f \circ g$. El dominio de $g \circ f$ es la parte del dominio de f, para los cuales g acepta a $f(x)$ como preimagen.

Esto es, $D(f) = \Re.$

Ahora, como g sólo acepta reales positivos de $f(x)$, esto es, valores de x para los cuales $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3,$ se concluye entonces que $D(g \circ f) = [3, +\infty).$

Nótese que $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(-1)$ no está definido.
Igualmente, $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(-1/2)$ no está definido.

También, el dominio $f \circ g$ es la parte del dominio de g para los cuales f acepta a $g(x)$ como preimagen.

Es decir, $D(g) = [0, +\infty)$.

Ahora, como f acepta cualquier valor real de $g(x)$, entonces f acepta en particular los valores de g en el intervalo $D(g) = [0, +\infty)$. De esta forma,

$$D(f \circ g) = [0, +\infty).$$

En el cálculo se necesita a menudo escribir una función dada como la composición de dos funciones. Esto puede hacerse de varias maneras.

Así por ejemplo, la función $P(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 2}$ puede escribirse en las formas:

$P(x) = (g \circ f)(x)$, siendo $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$ y $g(x) = \sqrt{x}$,

$P(x) = (g \circ f)(x)$, siendo $f(x) = 3x^2 + 5x$ y $g(x) = \sqrt{x+2}$.

En efecto, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 + 5x + 2) = \sqrt{3x^2 + 5x + 2}$ en el primer caso, y $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 + 5x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 2}$ en el segundo.

3.8 Clasificación de las funciones

3.8.1 Funciones monótonas

Definiciones

Sea $f(x)$ una función definida en $[a, b]$.

i. f es *creciente* en $[a, b]$ si y sólo si se cumple que

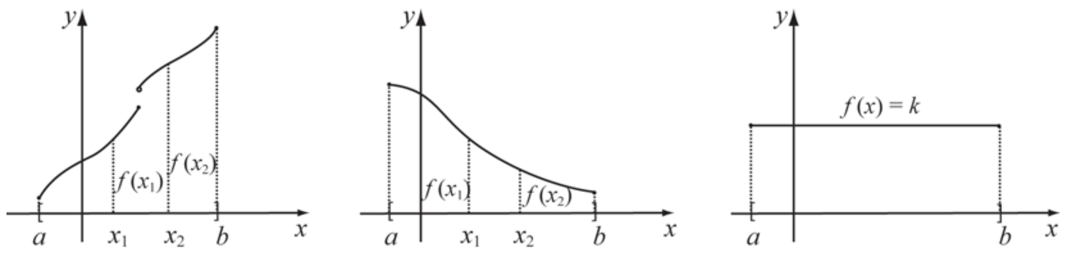
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ para todo } x_1, x_2 \in [a, b].$$

ii. f es *decreciente* en $[a, b]$ si y sólo si se cumple que

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ para todo } x_1, x_2 \in [a, b].$$

iii. f es *monótona* en $[a, b]$ si y sólo si f es creciente o decreciente en $[a, b]$.

Las gráficas siguientes (figura 3.31) ilustran las definiciones anteriores.



Función creciente | Función decreciente | No es ni creciente ni decreciente

Figura 3.31

3.8.2 Funciones inyectivas

Definición

Una función f es *inyectiva* (*uno a uno*) si se cumple que

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ para todo } x_1, x_2 \in D(f),$$

o equivalentemente,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ para todo } x_1, x_2 \in D(f).$$

En otras palabras, una función f es 1-1 si para cada x en el dominio f existe exactamente una y en el rango, y ninguna y en el rango es imagen de más de una x en el dominio.

Existe también un criterio sencillo para determinar si la gráfica de una ecuación corresponde a una función 1-1. Este criterio se conoce como criterio de la recta horizontal.

Criterio de la recta horizontal

Si toda recta horizontal corta a la gráfica de una función f en uno y sólo un punto, entonces f es 1-1.

Así por ejemplo, en la figura 3.32*a* aparece la gráfica de la función $y = f(x) = x^2 + 1$, la cual, de acuerdo al criterio de la recta horizontal, no corresponde a una función 1-1.

Nótese que la recta $y = 2$ corta la gráfica en más de un punto: $P_1(-1, 2)$ y $P_2(1, 2)$.

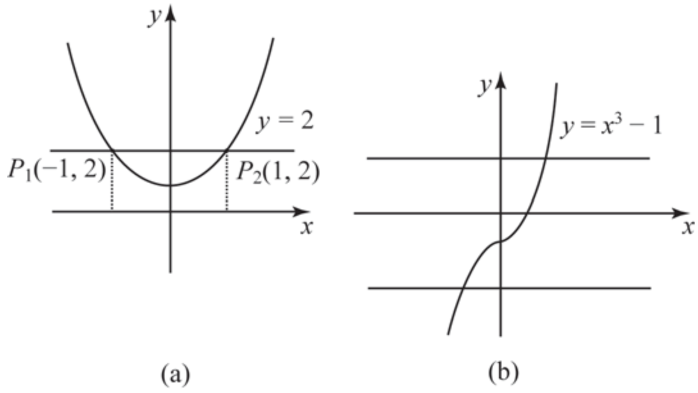


Figura 3.32

Igualmente, en la figura 3.32*b* aparece la gráfica de la función $y = x^3 - 1$, la cual, de acuerdo al criterio de la recta horizontal, corresponde a una función 1-1.

Nótese que toda recta horizontal corta a la gráfica en uno y sólo un punto.

Si se analiza un poco más la gráfica de la función en la figura 3.32*b*, se nota además que *f* es una *función creciente* en su dominio, y como toda función creciente (o decreciente) siempre tendrá valores diferentes de *y* para valores distintos de *x*, se sigue entonces que toda función creciente (o decreciente) en su dominio es 1-1.

3.9 Funciones inversas

Para hacer claridad sobre el concepto de función inversa, que se presenta en esta sección, se toma nuevamente la función *f* de la figura 3.32*b* que está definida por la ecuación

$$y = f(x) = x^3 - 1, \tag{1}$$

y cuyo dominio y rango es el conjunto $\Re$ de los números reales. Al despejar *x* en la ecuación (1) se obtiene

$$x = \sqrt[3]{y+1}. \tag{2}$$

Por la forma que presenta esta ecuación, se sabe que dado cualquier valor de *y*, tomado del rango de *f* (esto es, de $\Re$), existe uno y sólo un valor de *x* situado en el dominio de *f*. En consecuencia, la ecuación (2) nos define otra función cuyo dominio es el rango de *f* y cuyo rango es el dominio de *f*.

Así por ejemplo, la ecuación (1) asigna al valor $x = 2$ un único valor de *y*, en este caso $y = 2^3 - 1 = 7$.

La segunda ecuación efectúa la operación *inversa*, es decir, al valor $y = 7$ le asigna el valor de $x = \sqrt[3]{7+1} = 2$.

Si se quiere ahora representar, como es usual, con x a la variable independiente y con y a la dependiente, se intercambia x con y en la ecuación (2) y así se obtiene

$$y = \sqrt[3]{x+1}. \qquad (3)$$

La función definida por (2) o (3) y que se representa en forma general por f^{-1} se conoce como la inversa de la función f definida por (1). Igualmente, la función definida por (1) es la inversa de la función f^{-1} definida por (2).

Es decir,

$$y = f(x) = x^3 - 1 \Leftrightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}.$$

Las gráficas de $f(x)$ y de $f^{-1}(x)$ representadas en el mismo plano cartesiano aparecen en la figura 3.33.

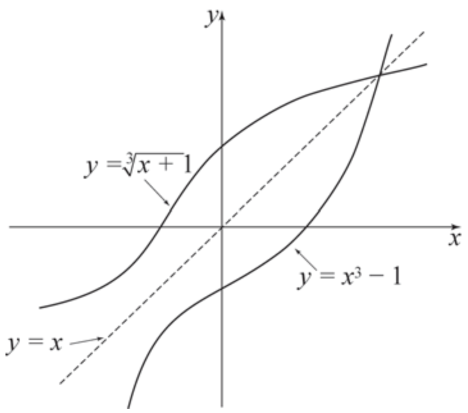


Figura 3.33

Considere ahora la función $y = f(x) = x^2 + 1$ cuya gráfica se muestra en la figura 3.32*a*.

El dominio de f lo constituye el conjunto $\mathfrak{R}$ de los números reales y el rango es el intervalo $[1, \infty)$.

Al despejar x, se obtiene $x = \pm\sqrt{y-1}.$

Esta última ecuación dice que para cada valor que se le asigne a la variable y, le corresponden dos valores a la variable x, y en consecuencia esta última ecuación no define una función. En este caso se dice que la función $y = f(x) = x^2 + 1$ *no* tiene inversa o que f^{-1} no existe.

De los dos ejemplos anteriores se deduce fácilmente que una función f tiene inversa si f es 1-1.

Definición

Sea $f : A \to B$ una función 1-1.

$\quad x \mapsto f(x).$

La inversa de *f*, denotada f^{-1}, es la función

$$f^{-1}: B \to A,$$
$$x \mapsto f^{-1}(x),$$

tal que

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ para cada } x \in A \text{ (dominio de } f\text{).}$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \text{ para cada } x \in B \text{ (dominio de } f^{-1}\text{).}$$

Nótese que $D(f) = r(f^{-1}) \wedge r(f) = D(f^{-1})$.

Se debe tener cuidado con el (-1) usado en f^{-1}. El (-1) no es un exponente, sino simplemente un símbolo para denotar la inversa.

Como ejemplo ilustrativo considere nuevamente la función definida por la ecuación $y = f(x) = x^3 - 1$. Se tiene:

$$\begin{cases} f: \ \Re \to \Re \\ x \mapsto f(x) = x^3 - 1 \\ f \ \text{ es } 1-1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} f^{-1}: \ \Re \to \Re \\ x \mapsto f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1} \end{cases}$$

en donde *f* y f^{-1} son inversas una de la otra. Además,

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3 - 1) = \sqrt[3]{(x^3 - 1) + 1} = x, \ \ x \in D(f) = \Re,$$

$$f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x+1}) = (\sqrt[3]{x+1})^3 - 1 = x, \ \ x \in D(f^{-1}) = \Re.$$

Como se mencionó antes, la función $f: \Re \to [1, +\infty)$,
$$x \mapsto f(x) = x^2 + 1,$$

no tiene inversa (pues *f* no es 1-1).

Sin embargo, dicha función genera dos funciones:

$$\begin{aligned} &f: (-\infty, 0] \to [1, +\infty) \\ &x \mapsto f(x) = x^2 + 1 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} &g: [0, +\infty) \to [1, +\infty) \\ &x \mapsto g(x) = x^2 + 1, \end{aligned}$$

que son 1-1 en sus respectivos dominios (figura 3.34) y en consecuencia tienen inversa.

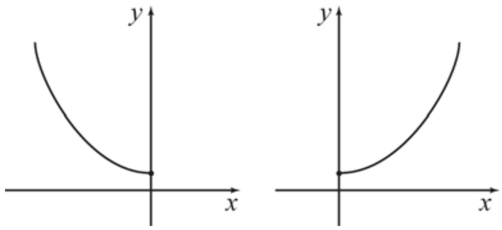


Figura 3.34

Para la función *f* se tiene:

$$f:(-\infty,0]\to[1,+\infty) \qquad \Rightarrow \qquad f^{-1}:[1,+\infty)\to(-\infty,0]$$
$$x\mapsto f(x)=x^2+1, \qquad\qquad x\mapsto f^{-1}(x)=-\sqrt{x-1}.$$

Las gráficas de *f* y f^{-1} en el mismo sistema de coordenadas aparecen en la figura 3.35.

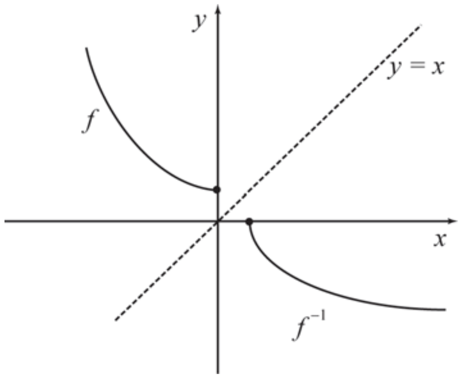


Figura 3.35

Igualmente, para la función *g* se tiene:

$$g:[0,+\infty)\to[1,+\infty) \qquad \Rightarrow \qquad g^{-1}:[1,+\infty)\to[0,+\infty)$$
$$x\mapsto g(x)=x^2+1, \qquad\qquad x\mapsto g(x)=\sqrt{x-1}.$$

Las gráficas de *g* y g^{-1} en el mismo sistema de coordenadas aparecen en la figura 3.36.

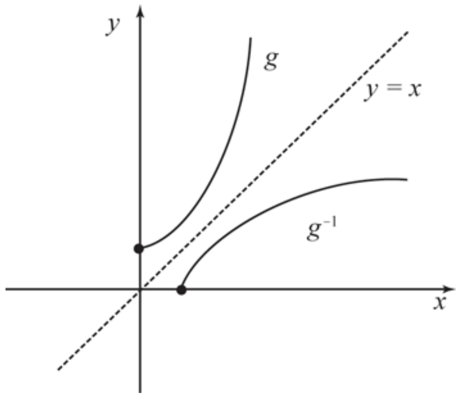


Figura 3.36

Además,

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2+1) &= -\sqrt{(x^2+1)-1} \\ &= -\sqrt{x^2} \\ &= -\sqrt{|x|^2} \qquad \text{(propiedad VA6)} \\ &= -|x| \\ &= x. \qquad \text{(definición de } |x|\text{)} \end{aligned}$$

Es decir,

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ para cada } x \in (-\infty, 0] = D(f).$$

Igualmente,

$$f(f^{-1}(x)) = f(-\sqrt{x-1}) = (-\sqrt{x-1})^2 + 1 = (x-1)+1 = x.$$

Es decir, $f(f^{-1}(x)) = x$ para cada $x \in [1, +\infty) = D(f^{-1})$.

Se deja para el lector el hacer las mismas consideraciones para la función g y su inversa g^{-1}.

Observación

Nótese en las figuras 3.35 y 3.36 que las gráficas de f y f^{-1} (g y g^{-1}) son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

El teorema que se presenta a continuación, sin demostración, establece condiciones suficientes para la existencia de la función inversa.

Teorema 1: Existencia de la función inversa

i. Sea f una función definida, continua y creciente en el intervalo I y de rango un subconjunto A de $\Re$. Entonces f^{-1} existe, es continua y creciente en A.

ii. Sea f una función definida, continua y decreciente en el intervalo I y de rango un subconjunto A de $\Re$. Entonces f^{-1} existe, es continua y decreciente en A.

3.10 Modelos matemáticos: construcción de funciones

Ejemplo 1

A un tanque que tiene la forma de un cono circular recto invertido de 4 m de radio y 16 m de altura entra agua a una razón determinada. Exprese el volumen de agua en un instante dado:

a. En función de la altura h.
b. En función del radio de la base x.

Solución

En la figura 3.37 aparece el tanque con las dimensiones dadas y una porción del volumen en el instante determinado.

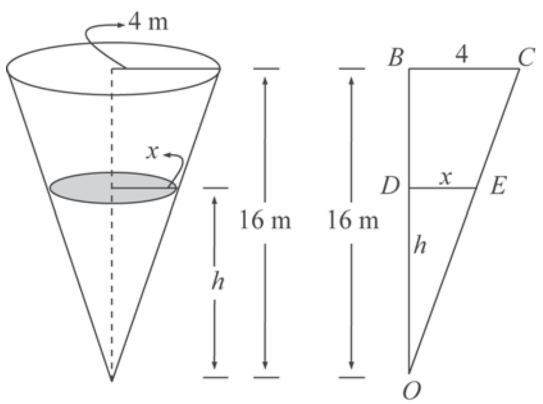


Figura 3.37

El volumen del agua en el instante determinado viene dado por:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h, \qquad (1)$$

$$\left(V_c = \frac{1}{3}(areabase)\cdot(altura) \right),$$ V_c: volumen del cono.

Como los triángulos ODE y OBC son semejantes, se tiene que:

$$\frac{16}{4}=\frac{h}{x}\Leftrightarrow 4x=h. \qquad (2)$$

a. Si se quiere expresar el volumen en función de la altura h, se debe despejar x en (2) y sustituirlo en (1). Así,

$$x=\frac{h}{4}.$$

Por tanto,

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{4}\right)^2\cdot h=\frac{1}{48}\pi h^3.$$

b. Para expresar el volumen en función del radio x, se sustituye (2) en (1). Así,

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2(4x)=\frac{4}{3}\pi x^3.$$

Ejemplo 2

Un alambre de 100 cm de longitud se corta a una distancia x de uno de sus extremos en dos partes, formando con una de ellas un círculo y con la otra un cuadrado (figura 3.38).

a. Exprese el perímetro de cada figura en función de x.
b. Exprese el área total de las figuras en función de x. ¿Cuáles son sus respectivos dominios?

Solución

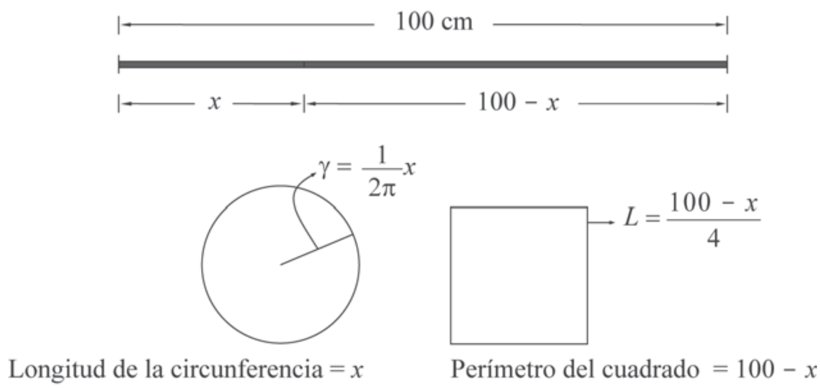


Figura 3.38

a. Longitud de la circunferencia $= 2\pi r = x \Rightarrow r = \dfrac{1}{2\pi}x.$ (1)

Perímetro del cuadrado $= 4L = 100 - x \Rightarrow L = \dfrac{1}{4}(100 - x).$ (2)

Ahora: $\begin{cases} P_1(x) = x & \text{(perímetro de la circunferencia)} \\ P_2(x) = 100 - x & \text{(perímetro del cuadrado)} \end{cases}$

$D(P_1(x)) = D(P_2(x)) = [0,100]$ (dominio de $P_1(x)$).

b. Área del círculo $= \pi r^2 \Rightarrow A_1(x) = \pi\left(\dfrac{1}{2\pi}x\right)^2 = \dfrac{1}{4\pi}x^2.$

Área del cuadrado $= L^2 \Rightarrow A_2(x) = \left[\dfrac{1}{4}(100 - x)\right]^2 = \dfrac{1}{16}(100 - x)^2.$

Así que:

$$A(x) = A_1(x) + A_2(x)$$

$$= \frac{1}{4\pi}x^2 + \frac{1}{16}(100 - x)^2, \text{ donde } 0 \le x \le 100.$$

Ejemplo 3

Se dispone de una cartulina cuadrada de lado a y se quiere hacer una caja sin tapa recortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando sus lados (figura 3.39). Exprese el volumen de la caja en función del lado del cuadrado recortado.

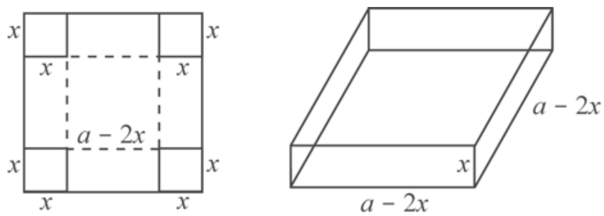


Figura 3.39

Solución

Sea x el lado del cuadrado recortado en cada una de las esquinas.

Volumen de la caja = área de la base $\times$ altura.

$$V(x) = (a - 2x)^2 \cdot x$$

$$= 4x^3 - 4ax^2 + a^2x, \text{ donde } 0 \le x \le \frac{a}{2}.$$

Ejemplo 4

Un abrevadero que está lleno de agua tiene 2 m de largo y sus extremos tienen la forma de triángulos equiláteros invertidos de 60 cm de lado (figura 3.40). ¿Cuál es el volumen de agua en el abrevadero?

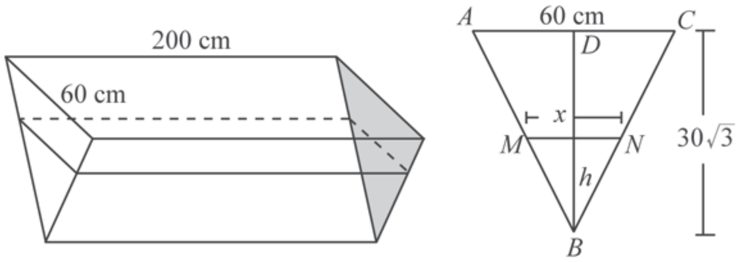


Figura 3.40

Si al abrevadero se le abre un orificio en el fondo y el agua se escapa a una razón dada, exprese el volumen en un instante dado posterior en función:

a. De la base del triángulo.
b. De la altura del triángulo.

Solución

Volumen = (área de la base) · (altura)

$$= \left(\frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2} \right) \cdot 200.$$

Pero $\overline{BD} = 30\sqrt{3}$ y $\overline{AC} = 60.$ Luego,

$$V = \frac{60 \cdot 30\sqrt{3}}{2} \cdot 200$$
$$= 180.000 \cdot \sqrt{3}\ \text{cm}^3.$$

En el instante posterior al que se mide el volumen, las caras laterales son triángulos cuya base es x y cuya altura es h. Así que:

$$V = \frac{x \cdot h}{2} \cdot 200 = 100x \cdot h. \qquad (1)$$

Ahora, como los triángulos ABC y MBN son segmentos, se tiene que:

$$\frac{60}{x} = \frac{30\sqrt{3}}{h} \Leftrightarrow \frac{2}{x} = \frac{\sqrt{3}}{h}. \qquad (2)$$

a. Para expresar el volumen en función de la base x del triángulo, se despeja h en (2) y se sustituye en (1). Así,

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} x.$$

Luego,

$$V = 100x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

$$= 50\sqrt{3}x^2, \text{ con } 0 \leq x \leq 60.$$

$V(0) = 0$ (el tanque está vacío)

$V(60) = 50\sqrt{3} \cdot 60^2 = 180.000\sqrt{3}\,\text{cm}^3.$ (el tanque está lleno)

b. Igualmente, si se quiere expresar el volumen en función de la altura h, de (2) se tiene que:

$$x = \frac{2h}{\sqrt{3}},$$

y sustituyendo en (1) se obtiene:

$$V = 100\left(\frac{2h}{\sqrt{3}}\right) \cdot h = \frac{200\sqrt{3}}{3} h^2.$$

Esto es,

$$V(h) = \frac{200\sqrt{3}}{3} h^2, \text{ con } 0 \leq h \leq 30\sqrt{3}.$$

Note que:

$V(0) = 0$ (el tanque está vacío)

$V(30\sqrt{3}) = \frac{200\sqrt{3}}{3}(30\sqrt{3})^2 = 180.000\sqrt{3}\,\text{cm}^3.$ (el tanque está lleno).

Ejemplo 5

Los puntos A y B están situados uno frente al otro y en lados opuestos de un río recto de 300 m de ancho. Los puntos Q y D están respectivamente y en la misma orilla de B a x m y a 600 m (figura 3.41).

Una compañía de teléfonos desea tender un cable desde A hasta D pasando por Q.

Si el costo por metro de cables es de $\frac{5}{4}k$ pesos bajo el agua y de k pesos por tierra, exprese el costo total como una función x. ¿Cuál es el dominio de la función costo?

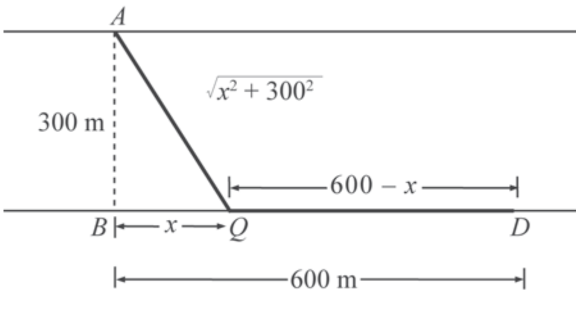


Figura 3.41

Solución

La función costo total viene dada por:

$$C = \frac{5}{4}k \cdot d(A,Q) + k \cdot d(Q,D),$$

donde $d(A, Q)$ es la distancia de A a Q, y $d(Q, D)$ es la distancia de Q a D.

$$C(x) = \frac{5}{4}k\sqrt{x^2 + 300^2} + k(600 - x), \text{ con } 0 \leq x \leq 600.$$

El dominio de la función costo total es el intervalo [0, 600].

Note que:

i. $$C(0) = \frac{5}{4}k\sqrt{300^2} + 600k = 975k.$$

Esto significa que si $x = 0$, el punto Q coincide con B, y en este caso el cable se debe tender desde A hasta B por agua y desde B hasta D por tierra, implicando un gasto total de $975k$ pesos.

ii. $$C(600) = \frac{5}{4}k\sqrt{600^2 + 300^2} = 375\sqrt{5}k \approx 838.5k.$$

Esto significa que si $x = 600$, el punto Q coincide con D, y en este caso el cable se debe tender directamente desde A hasta D por agua, demandando un gasto total de aproximadamente $838.5k$ pesos.

iii. $$C(400) = \frac{5}{4}k\sqrt{400^2 + 300^2} + 200k = 825k.$$

Esto significa que si el punto Q está a 400 m de B y se tiende el cable por agua desde A hasta Q y por tierra desde Q hasta D, demandaría un gasto menor para la compañía que los dos casos anteriores.

Más adelante se demostrará, usando derivación, que cualquier valor de x, $x \neq 400$, demandará un gasto mayor para la compañía.

Ejemplo 6

Se dispone de 1.000 dólares para construir un tanque cilíndrico de altura y pies, rematado en sus extremos por dos semiesferas de radio x pies (figura 3.42). El costo de material de la parte esférica es de 4 dólares por pie^2 y el de la parte cilíndrica es de 2 dólares por pie^2.

Exprese el volumen del tanque en función del radio x.

Solución

En la figura 3.42 aparece el tanque que se desea construir.

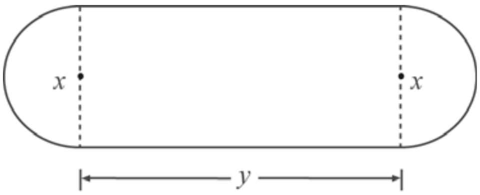


Figura 3.42*a*

La parte cilíndrica es equivalente al rectángulo de longitud *y* y ancho $2\pi x$.

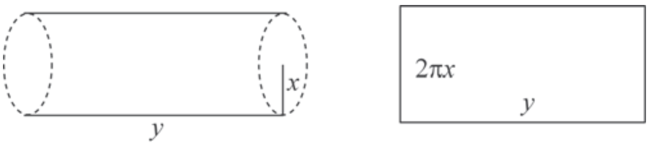


Figura 3.42*b*

Luego, el área de la parte cilíndrica es $2\pi xy$ y su costo C_1 viene dado por $C_1 = 4\pi xy$.

Como los extremos son dos semiesferas, su área es equivalente al área de una esfera de radio *x*, esto es, $4\pi x^2$, y su costo C_2 viene dado por $C_2 = 16\pi x^2$. Así que:

$$C_1 + C_2 = 1.000,$$

$$4\pi xy + 16\pi x^2 = 1.000 \Leftrightarrow \pi xy + 4\pi x^2 = 250. \qquad (1)$$

Ahora,

$$V_T = V_C + V_E. \qquad \text{(volumen total)},$$

donde V_C es el volumen del cilindro y V_E es el volumen de la esfera.

Pero,

$$V_C = \pi x^2 y.$$

$$V_E = \frac{4}{3}\pi x^3.$$

De esta forma:

$$V_T = \pi x^2 y + \frac{4}{3}\pi x^3. \qquad (2)$$

Como se debe expresar el volumen total en función de *x* únicamente, se despeja la variable *y* en (1) y se sustituye en (2).

Así, de (1) se tiene que:

$$y = \frac{250 - 4\pi x^2}{\pi x},$$

y sustituyendo este valor de y en (1) se puede escribir:

$$V(x) = \pi x^2 \left(\frac{250 - 4\pi x^2}{\pi x} \right) + \frac{4}{3}\pi x^3,$$

y simplificando se obtiene finalmente:

$$V(x) = 250x - \frac{8}{3}\pi x^3.$$

¿Es posible expresar el volumen del tanque en función de y? ¡Trate de hacerlo!

Ejemplo 7

Una piscina rectangular de 20 m de largo por 10 m de ancho tiene 4 m de profundidad en un extremo y 1 m en el otro. La figura 3.43 ilustra una vista transversal de la piscina. El agua para llenar la piscina es bombeada por el extremo profundo.

a. Determine una función que exprese el volumen V de agua en la piscina como función de su profundidad x en el extremo profundo.

b. Calcule $V(1)$ y $V(2)$.

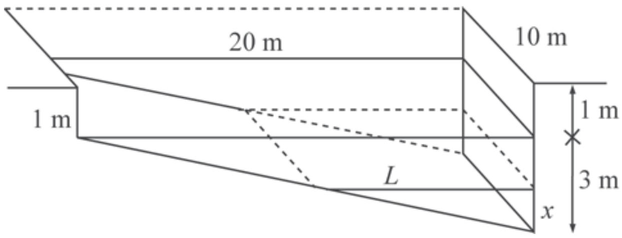


Figura 3.43

Solución

a. Sea L la longitud de la medida del nivel del agua desde el extremo profundo hasta el menos profundo.

Note que L y x son los lados de un triángulo rectángulo semejante al triángu lo cuyos lados son 20 y 3 m.

De esta forma, se puede establecer la siguiente proporción:

$$\frac{L}{x}=\frac{20}{3}\Leftrightarrow L=\frac{20}{3}x,\text{ con }\ 0\leq x\leq 3.$$

Ahora, el volumen V en un instante determinado viene dado por:

V = (área de la sección transversal) · (ancho)

$$=\frac{L\cdot x}{2}\cdot 10=\frac{\frac{20}{3}x\cdot x}{2}\cdot 10=\frac{100}{3}x^2.$$

$$V(x)=\frac{100}{3}x^2.$$

b. $V(1)=\frac{100}{3}1^2=\frac{100}{3}\approx 33.3\text{ m}^3.$

$V(2)=\frac{100}{3}2^2=\frac{400}{3}\approx 133.3\text{ m}^3.$

Ejercicios del capítulo 0 (módulos 1 al 3)

Ejercicios resueltos sobre intervalos, desigualdades y valor absoluto

1. Considere los siguientes intervalos:

$$A=[-3,3];\; B=(-3,3);\; C=[-1,4];\; D=(-4,5].$$

Dibuje sobre la recta real y escriba con notación de intervalo el resultado de las siguientes operaciones:

a. $A \cup D$.
b. $A \cap C$.
c. $B - C$.
d. $A \cap (B \cup C)$.
e. B^* (el complemento de B).
f. C^* (el complemento de C).

Solución

En primer lugar, se dibuja cada uno de los intervalos dados en la recta real, para luego efectuar de una manera más sencilla las operaciones propuestas (figura 1).

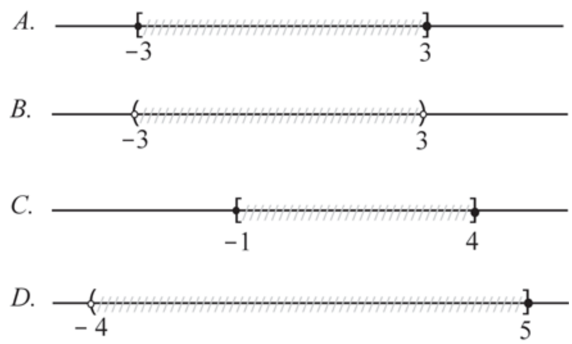


Figura 1

Así que:

a. $A \cup D = D = (-4, 5] = \{x \in \Re : -4 < x \leq 5\}$.

b. Como la intersección de dos conjuntos corresponde al conjunto de elementos comunes, se deduce de las gráficas que:

$$A \cap C = [-1, 3] = \{x \in \Re : -1 \leq x \leq 3\}.$$

c. La diferencia entre los conjuntos B y C se define como el conjunto formado por los elementos que están en B, pero que no están en C, esto es, el intervalo $(-3,-1)$.

Así que:

$$B - C = (-3, -1) = \{x \in \Re : -3 < x < -1\}.$$

Igualmente,

$$C - B = [3,\ 4] = \{x \in \Re : 3 \leq x \leq 4\}.$$

d. En primer lugar, $B \cup C = (-3,\ 4] = \{x \in \Re : -3 < x \leq 4\}$, como se ve en la figura 2.

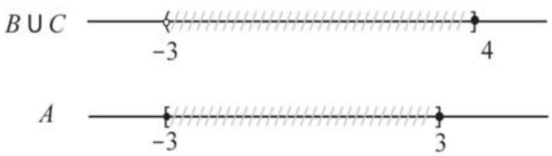


Figura 2

De la gráfica anterior se deduce que:

$$A \cap (B \cup C) = (-3,\ 3] = \{x \in \Re : -3 < x \leq 3\}.$$

e. En este caso, el conjunto universal o referencial es $\Re$. Así que:

$$B^* = \Re - B = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) = \{x \in \Re : x \leq -3 \vee x \geq 3\}.$$

f. Igualmente,

$$C^* = \Re - C = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty) = \{x \in \Re : x < -1 \vee x > 4\}.$$

2. Resuelva la desigualdad $3x - 1 \leq x + 5$.

Solución

$$\begin{aligned} 3x - 1 \leq x + 5 &\Leftrightarrow 3x - x \leq 5 + 1 \\ &\Leftrightarrow 2x \leq 6 \\ &\Leftrightarrow x \leq 3. \end{aligned}$$

En consecuencia, la solución o el conjunto solución S viene dado por:

$$S = \{x \in \Re : x \leq 3\} = (-\infty,\ 3].$$

3. Resuelva la desigualdad $\dfrac{x}{x^2 + 3} > \dfrac{2}{x^2 + 3}$.

Solución

$$\frac{x}{x^2+3} > \frac{2}{x^2+3} \Leftrightarrow x > 2 \ \text{(¿por qué?).}$$

En consecuencia, la solución es el intervalo abierto $(2, +\infty)$.

4. Resuelva la desigualdad $\dfrac{x}{x-1} \geq \dfrac{2}{x-1}$.

Solución

Debe notarse en primer lugar que la desigualdad $\dfrac{x}{x-1} \geq \dfrac{2}{x-1}$ no es equivalente a $x \geq 2$, puesto que $(x-1)$ no siempre es positivo. Sin embargo,

$$\frac{x}{x-1} \geq \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-1} \geq 0.$$

Esta última desigualdad se satisface si y sólo si $x = 2$ o las dos cantidades $(x - 2)$ y $(x - 1)$ tienen el mismo signo (ambas positivas o ambas negativas) (¿por qué?).

Pero

$(x - 2)$ y $(x - 1)$ son positivos si y sólo si $x > 2$.

También

$(x - 2)$ y $(x - 1)$ son negativos si y sólo si $x < 1$.

En consecuencia, la solución de la desigualdad la constituye la unión de los intervalos

$[2, +\infty)$ y $(-\infty, 1)$.

Esto es,

$$S = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty).$$

5. Resuelva la desigualdad $\dfrac{x-2}{x-1} < \dfrac{x+2}{x+1}$.

Solución

En primer lugar, la «inexperiencia» lo puede llevar a efectuar el producto de extremos y medios, conservando el sentido de la desigualdad y escribir que

$$\frac{x-2}{x-1} < \frac{x+2}{x+1} \Leftrightarrow (x-2)(x+1) < (x+2)(x-1) \Leftrightarrow x > 0 \ \text{ es la solución.}$$

Sin embargo, existen valores de x, $x > 0$, que no son solución (por ejemplo $x = 1/2$) y existen valores de x, $x < 0$, que sí son solución (por ejemplo $x = -1/2$). En consecuencia, $x > 0$ no corresponde al conjunto solución.

Para evitar situaciones como la anterior, procedemos de la siguiente forma:

$$\frac{x-2}{x-1} < \frac{x+2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-1} - \frac{x+2}{x+1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)-(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x}{(x-1)(x+1)} < 0.$$

La última desigualdad puede resolverse analíticamente distinguiendo varios casos según el signo del numerador y el denominador de la fracción.

El método que se propone a continuación es mucho más ágil y puede desarrollarse siguiendo estos pasos:

1. Se analiza el *signo de cada* uno de los factores que contiene el numerador y el denominador de la fracción, tomando como *punto de referencia* los valores que anulan cada factor. Para ello se eligen *puntos de prueba* anteriores y posteriores al referencial.

2. Se efectúa el producto de los signos de cada factor en los intervalos determinados por los puntos de referencia.

3. El conjunto solución lo constituye el intervalo o unión de intervalos cuyo signo coincide con el sentido de la desigualdad. Así, si el sentido de la desigualdad es «>», se eligen los intervalos con signo (+). Si el sentido de la desigualdad es «<», se eligen los intervalos con signo (–).

4. Se verifica si los puntos referenciales pertenecen o no al conjunto solución, sustituyéndolos en la desigualdad para poder determinar de esta forma la naturaleza de ellos: abierto, cerrado, semiabierto, etc.

Apliquemos el método al caso particular $\frac{-2x}{(x-1)(x+1)} < 0$. El diagrama adjunto recoge toda la información obtenida siguiendo el método descrito.

		Punto de referencia	*Puntos de prueba*
Signo de $(-2x)$	$+++++++++\mid---------$ 0	$-2x = 0$ $\Rightarrow x = 0$	$x = 1$ $x = -1$
Signo de $(x-1)$	$-------------\mid+++++$ 1	$x - 1 = 0$ $\Rightarrow x = +1$	$x = 0$ $x = 2$
Signo de $(x+1)$	$----\mid++++++++++++$ -1	$x + 1 = 0$ $\Rightarrow x = -1$	$x = -2$ $x = 0$
Signo del producto	$++++\mid-----\mid++++\mid----$ $-1 \quad 0 \quad 1$		

Note que los puntos referenciales no satisfacen la desigualdad, por tanto no pertenecen al conjunto solución.

Como el sentido de la desigualdad es «<», interesan para la solución los intervalos del producto con signo (–). Es decir, $S = (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ es el conjunto solución.

6. Resuelva la desigualdad $|3x+1| \geq 2|x-6|$.

Solución

La desigualdad inicial puede escribirse en las formas equivalentes:

$$\begin{aligned} |3x+1| \geq 2|x-6| &\Leftrightarrow |3x+1| \geq |2x-12| \\ &\Leftrightarrow (3x+1)^2 \geq (2x-12)^2 \text{ (propiedad VA6}'\text{)} \\ &\Leftrightarrow 9x^2+6x+1 \geq 4x^2-48x+144 \\ &\Leftrightarrow 5x^2+54x-143 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (5x-11)\cdot(x+13) \geq 0. \end{aligned}$$

La última desigualdad la resolvemos por el método gráfico.

		Punto de referencia	*Puntos de prueba*
Signo de $(5x-11)$	– – – – – – – – | + + + + + + + 11/5	$5x-11=0$ $\Rightarrow x = 11/5 = 2.2$	$x=2$ $x=3$
Signo de $(x+13)$	– – –|+ + + + + + + + + + + + + –13	$x+13=0$ $\Rightarrow x=-13$	$x=-14$ $x=-12$
Signo del Producto	+ + +|– – – – –|+ + + + + + + + –13 11/5		

Note que al sustituir los valores de x de los puntos de referencia en la última desigualdad, se transforma en una proposición verdadera.

O sea que si $x = 11/5$, entonces $\left(5\cdot\frac{11}{5}-11\right)\left(\frac{11}{5}+13\right) \geq 0$; también, si $x=-13$, entonces $(5(-13)-11)(-13+13) \geq 0$.

En consecuencia, dichos puntos pertenecen al conjunto solución. Como el sentido de la última desigualdad es «$\geq$», interesan para la solución los intervalos del producto con signo (+). Es decir, $S = (-\infty, -13] \cup [11/5, +\infty)$ es el conjunto solución.

Se recomienda al estudiante lector que, después de estudiar los ejemplos anteriores, afiance los conocimientos adquiridos desarrollando los ejercicios propuestos que para tal fin aparecen al final del capítulo.

Ejercicios resueltos sobre la línea recta

7. Halle la distancia entre los puntos P_1 (2, – 8) y P_2 (3, 5).

Solución

$x_1 = 2,\ x_2 = 3;\ y_1 = -8, y_2 = 5.$

Por tanto,

$$|P_1P_2| = d = \sqrt{1^2 + 13^2} = \sqrt{170}.$$

8. Sean P_1 (– 1,1) y P_2 (3, 0) dos puntos en el plano. Determine:

a. Las coordenadas del punto medio M del segmento $\overline{P_1P_2}$.

b. Las coordenadas del punto P sobre el segmento $\overline{P_1P_2}$ tal que $\dfrac{P_1P}{P_1P_2} = \dfrac{1}{3}$.

Solución

a. En la figura 3 aparecen el segmento $\overline{P_1P_2}$ y los puntos pedidos en a y b.

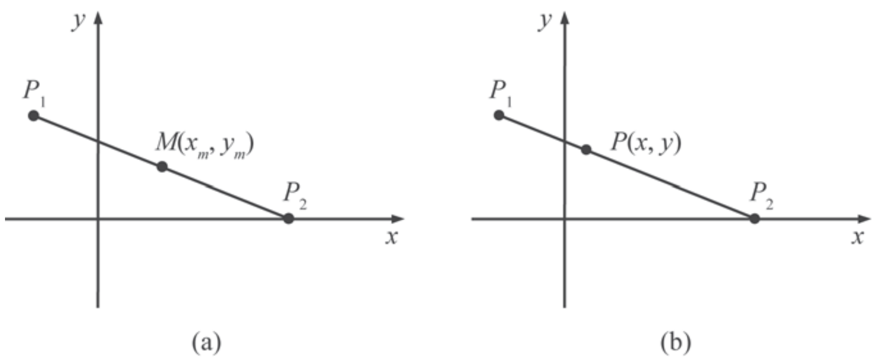


Figura 3

Si el punto medio M tiene coordenadas M (x_m, y_m), entonces:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1.$$
$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto, las coordenadas del punto M son M (1, 1/2).

b. Como $\frac{P_1P}{P_1P_2}=\frac{1}{3}$, entonces $\lambda=\frac{1}{3}$.

Si $P(x,y)$ denota las coordenadas del punto P, se tiene, de acuerdo con las fórmulas (5) y (6) de la sección 2.2:

$$x=-1+\frac{1}{3}(3-(-1))=-1+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}.$$
$$y=1+\frac{1}{3}(0-1)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

Por tanto, las coordenadas del punto P son $P\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

9. Escriba la ecuación de las rectas l, m, n y r indicadas en la figura 4.

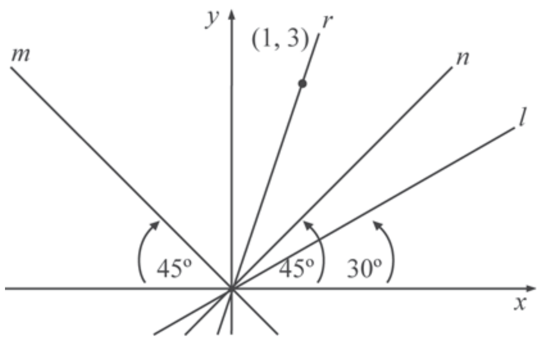


Figura 4

Solución

Para la recta l, se tiene:

$$y=(\tan 30°)\cdot x=\frac{\sqrt{3}}{3}x.$$

Para la recta n, se tiene:

$y=(\tan 45°)\cdot x=1\cdot x=x$. Es decir, $y=x$.

Igualmente, para la recta m se tiene:

$y=(\tan 135°)\cdot x=(-\tan 45°)\cdot x=-1\cdot x.$ Esto es, $y=-x$.

Ahora, como el punto $P(1, 3)\in r$, se tiene que

$$m=\frac{y}{x}=\frac{3}{1}=3.$$

Por tanto, la ecuación de la recta r es:

$y=3x$.

10. Escriba la ecuación de las rectas *l*, *m*, *n* y *r* indicadas en la figura 5.

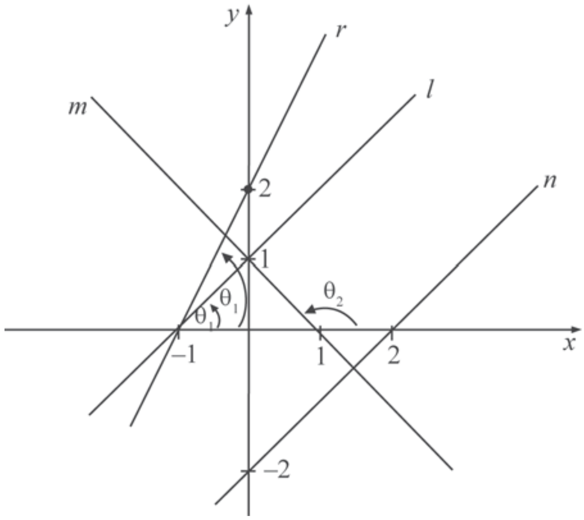


Figura 5

Solución

Para la recta *l*, el intercepto con el eje *y* es $b = 1$. Además, $\tan\theta_1 = 1 = m_1$. Por tanto, la ecuación de la recta *l* es:

$$y = x + 1.$$

Para la recta *m*, $b = 1$ y $m_2 = \tan\theta_2 = -1$. Por tanto, la ecuación de la recta *m* es:

$$y = -x + 1.$$

También, para la recta *n*, $b = -2$ y la ecuación de la recta *n* tiene la forma $y = mx - 2$. Como el punto $(2, 0) \in n$, entonces satisface su ecuación, es decir, $0 = 2m - 2$, de donde $m = 1$.

Por tanto, la ecuación de la recta *n* es:

$$y = x - 2.$$

Para la recta *r*, se procede como se hizo para *l*, obteniendo como ecuación:

$$y = 2x + 2.$$

11. Determine las ecuaciones de las rectas *l* y *r* que se muestran en la figura 6.

Solución

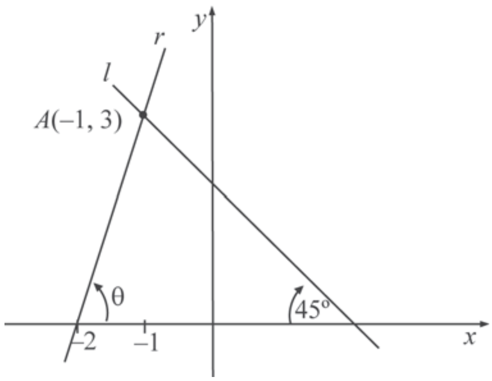


Figura 6

Para la recta l se tiene, usando la forma punto-pendiente (sección 2.4.3) de la ecuación de la recta:

$$y - 3 = m_l\,(x + 1).$$

Pero $m_l = \tan 135° = -\tan 45° = -1$. Por tanto,

$$y - 3 = -(x + 1) \quad \text{o} \quad x + y - 2 = 0$$

es la ecuación de la recta l.

Para la recta r se tiene que $y - 3 = m_r\,(x + 1)$.

Pero $m_r = \tan\theta = \dfrac{3}{1} = 3.$

Por tanto, $y - 3 = 3(x + 1)$ o $3x - y + 6 = 0$

representa la ecuación de la recta r.

12. Obtenga la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (1, 3) y B (− 2, 1). Determine el intercepto de la recta con el eje y.

Solución

En la figura 7 aparecen los puntos dados y la recta l que pasa por ellos.

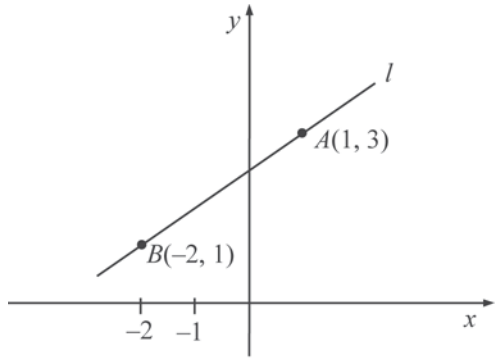


Figura 7

a. Para hallar la ecuación de la recta procedemos así: usando la forma dos-puntos (sección 2.4.4) de la ecuación de la recta, se tiene:

$$y-3=\frac{1-3}{-2-1}(x-1),$$

o equivalentemente,

$$3y-9=2x-2,$$

o también,

$$2x-3y+7=0. \qquad (1)$$

La ecuación (1) corresponde a la recta pedida.

b. Para hallar el intercepto b de la recta con el eje y hacemos en (1) $x = 0$, y se obtiene que $y=\frac{7}{3}$.

13. Escriba las ecuaciones de las rectas l_1, l_2, l_3 y l_4 que aparecen en la figura 8.

Solución

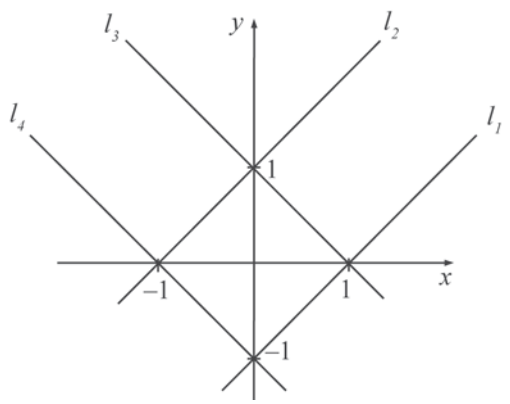


Figura 8

Para l_1 se tiene que $a=1,\ b=-1$. Por tanto,

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{-1}=1$$

es la ecuación de l_1, es decir,

$$x-y=1.$$

Para l_2 se tiene que $a=-1,\ b=1$. Luego,

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{1}=1,$$

de donde la ecuación pedida es:

$$x-y=-1.$$

Para l_3 se tiene que $a=1,\ b=1$. Luego,

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1,$$

es decir, la ecuación pedida es:

$$x+y=1.$$

Finalmente, para l_4 se tiene $a=-1,\ b=-1$. Luego,

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{-1}=1,$$

de donde la ecuación pedida es:

$$x+y=-1.$$

14. Usando la forma general, determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(-1,\ -4)$ y $P_2(5,\ 1)$.

Solución

Suponga que la recta pedida tiene por ecuación $Ax+By+C=0$. (1)

Como P_1 y P_2 pertenecen a la recta, entonces sus coordenadas satisfacen la ecuación (1). Esto es:

$A(-1)+B(-4)+C=0$ o $-A-4B+C=0.$ (2)
$A(5)+B(1)+C=0$ o $5A+B+C=0.$ (3)

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (2) y (3) para A y B en términos de C se obtiene:

$$A = -\frac{5}{19}C \text{ y } B = \frac{6}{19}C.$$

Reemplazando los valores de A y B en (1) se obtiene:

$$-\frac{5}{19}Cx + \frac{6}{19}Cy + C = 0 \qquad \text{o} \qquad -5Cx + 6Cy + 19C = 0.$$

Dividiendo esta última igualdad por $-C$, obtenemos finalmente $5x - 6y - 19 = 0$ como la ecuación de la recta pedida.

15. Dada la recta l cuya ecuación en su forma general viene dada por $3x + 4y - 5 = 0$, determine:

a. La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 2)$ y es paralela a l.
b. La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 2)$ y es perpendicular a l.

Solución

a. Sean l_1 y l_2 las rectas paralela y perpendicular a l, respectivamente, y que pasan por el punto $P(1, 2)$. Sean m_1, m, m_2 las pendientes de l_1, l y l_2, respectivamente (figura 9).

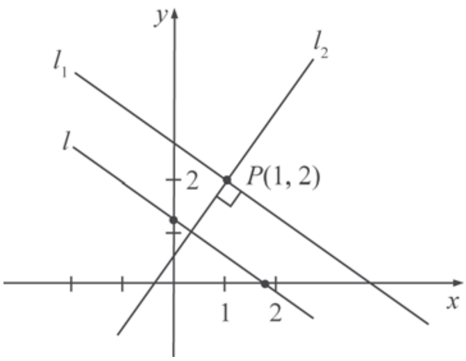


Figura 9

Como $l_1 \parallel l$, entonces $m_1 = m$; y puesto que $m = -\frac{3}{4}$, se concluye que:

$$m_1 = -\frac{3}{4}.$$

Ahora, usando la forma punto-pendiente (sección 2.4.3) de la ecuación de la recta, se tiene para l_1 que:

$$y - 2 = -\frac{3}{4}(x - 1).$$

Y simplificando se puede escribir en la forma general:

$$3x + 4y - 11 = 0.$$

b. Como $l_2 \perp l$, entonces $m_2 = -1/m$; y como $m = -\frac{3}{4}$, se concluye que:

$$m_2 = \frac{4}{3}.$$

Usando nuevamente la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, se tiene para l_2 que:

$$y - 2 = \frac{4}{3}(x - 1).$$

Y simplificando se puede escribir en la forma general:

$$4x - 3y + 2 = 0.$$

16. Pruebe analíticamente que la perpendicular trazada desde el ángulo recto de un triángulo rectángulo a la hipotenusa, es media proporcional entre los segmentos que ésta determina sobre la misma.

Solución

Por conveniencia, se coloca el triángulo *ABC* como aparece en la figura 10, donde $\overline{CA}$ es la hipotenusa.

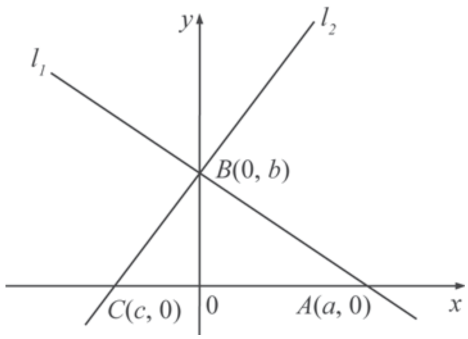


Figura 10

Debemos probar que:

$$\frac{\overline{CO}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}.$$

Si l_1 denota la recta que pasa por los puntos *A* y *B* y l_2 la recta que pasa por los puntos *C* y *B*, y m_1 y m_2 sus pendientes, entonces:

$$m_1 = -\frac{b}{a} \text{ y } m_2 = \frac{b}{c}.$$

Como $l_1 \perp l_2$, entonces $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Esto es, $\left[-\frac{b}{a}\right]\left[\frac{b}{c}\right] = -1$, de donde $c = \frac{b^2}{a}$.

Ahora, $\overline{CO} = \dfrac{b^2}{a}$, $\overline{OB} = b$ y $\overline{OA} = a.$

Así que:

$$\frac{\overline{CO}}{\overline{OB}} = \frac{b}{a} \text{ y } \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{b}{a},$$

luego

$$\frac{\overline{CO}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}},$$

que es lo que se quería demostrar.

17. Calcule la distancia del origen a la recta de interceptos *a* y *b* con los ejes coordenados.

Solución

En la figura 11 se ha trazado la recta de interceptos *a* y *b*, siendo $d = \overline{OH}$ la distancia del origen a la recta.

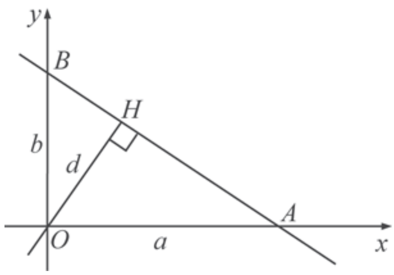


Figura 11

Una propiedad métrica de los triángulos rectángulos establece que el producto de los catetos es igual al producto de la hipotenusa por la altura que cae sobre ella. Aplicando esta propiedad al triángulo rectángulo *AOB* de la figura, se tiene que:

$$\overline{OB} \cdot \overline{OA} = \overline{OH} \cdot \overline{AB}.$$

Es decir, $b \cdot a = d \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$, de donde:

$$d = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

18. a. Encuentre la ecuación de la recta que contiene el punto $P(17,12)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $5x + 12y - 60 = 0$.
b. Encuentre el punto P_1 de intersección de las rectas perpendiculares del literal *a*.
c. Encuentre la distancia del punto de intersección obtenido en *b* al punto *P* dado en *a*.

Solución

a. Como la pendiente de la recta de ecuación $5x + 12y - 60 = 0$ es $m = -\frac{5}{12}$, entonces, si m_1 denota la pendiente de la perpendicular, se sigue que $m_1 = \frac{12}{5}$.

Así que de la recta que se busca se conoce su pendiente $m_1 = \frac{12}{5}$ y el punto P (17, 12). En consecuencia, la ecuación de dicha recta viene dada por:

$$y - 12 = \frac{12}{5}(x - 17),$$

y por tanto $12x - 5y - 144 = 0$ es la ecuación general de la recta pedida.

b. Para encontrar el punto de intersección entre las rectas, se resuelve simultáneamente el sistema:

$$5x + 12y - 60 = 0, \quad (1)$$
$$12x - 5y - 144 = 0. \quad (2)$$

Para ello, se multiplica por 5 la ecuación (1) y se le suma la ecuación (2) multiplicada por 12. Así:

$$\begin{array}{c} 25x + 60y - 300 = 0 \\ \underline{144x - 60y - 1.728 = 0} \\ 169x - 2.028 = 0 \end{array}$$

de donde $x = 12$ es la abscisa del punto de intersección.

Reemplazando el valor de x así obtenido en cualquiera de las ecuaciones (1) o (2) se obtiene $y = 0$ como la ordenada del punto de intersección entre las rectas. Es decir, $P_1(12, 0)$ es el punto de intersección pedido.

En la figura 12 se ilustra la situación planteada en los literales *a* y *b*.

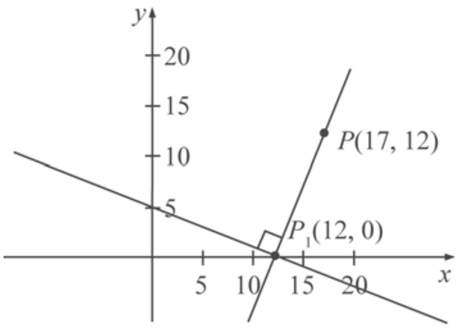


Figura 12

c. Usando la fórmula de la distancia entre dos puntos, se obtiene:

$$\begin{aligned}|PP_1| &= \sqrt{(17-12)^2+(12-0)^2} = \sqrt{169}\\ &= 13.\end{aligned}$$

Otra forma de obtener la distancia entre los puntos P y P_1 es usando la fórmula de la distancia del punto $P(17, 12)$ a la recta de ecuación $5x + 12y - 60 = 0$. En efecto,

$$d = \frac{|5(17)+12(12)-60|}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{|169|}{13} = 13.$$

19. Usando un procedimiento similar al del ejercicio 18, deduzca la fórmula de la distancia del punto $P\,(x_1, y_1)$ a la recta de ecuación $Ax + By + C = 0$.

Solución

Considere en el plano la recta l de ecuación:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

y el punto $P\,(x_1, y_1)$ del plano que no está en la recta (figura 13).

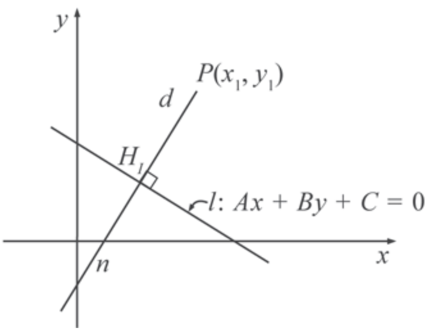


Figura 13

La pendiente de la recta l viene dada por $m = -\dfrac{A}{B}$. Si llamamos n a la perpendicular trazada desde $P\,(x_1, y_1)$ a la recta l, entonces la pendiente de n es $m_n = \dfrac{B}{A}$, y como $P(x_1, y_1)$ está sobre n, se tiene entonces que:

$$y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1) \qquad (2)$$

representa la ecuación de n.

De (2) se deduce que:

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \lambda.$$

De donde

$$\frac{x - x_1}{A} = \lambda \quad \text{y} \quad \frac{y - y_1}{B} = \lambda.$$

Así que:

$$\begin{cases} x = x(\lambda) = x_1 + \lambda A \\ y = y(\lambda) = y_1 + \lambda B \end{cases} \qquad (3)$$

representan las ecuaciones paramétricas de la recta n.

A cada valor de λ le corresponde un punto de n. Así, por ejemplo, cuando $\lambda = 0$, $x(0) = x_1$, $y(0) = y_1$, o sea que estamos en el punto $P(x_1, y_1)$ de n.

Si $H_I(x_I, y_I)$ denota el punto de intersección de las rectas l y n, entonces existe un valor de $\lambda, (\lambda_H)$ tal que

$$\begin{cases} x_I = x_1 + \lambda_H A \\ y_I = y_1 + \lambda_H B \end{cases} \qquad (4)$$

puesto que $H_I \in n$, por lo tanto satistace (3).

Igualmente, como $H_I \in l$, entonces H_I satisface su ecuación. Esto es, $Ax_I + By_I + C = 0$, y sustituyendo los valores de (4) podemos escribir:

$$A(x_1 + \lambda_H A) + B(y_1 + \lambda_H B) + C = 0, \text{ o}$$

$$Ax_1 + By_1 + \lambda_H (A^2 + B^2) + C = 0,$$

de donde,

$$\lambda_H = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}. \qquad (5)$$

Al sustituir (5) en (4), se pueden conocer las coordenadas x_I e y_I del punto de intersección en términos de las cantidades conocidas A, B, C, x_1, y_1.

De otro lado, si $d = \overline{PH_I}$ denota la distancia del punto $P(x_1, y_1)$ al punto $H_I(x_I, y_I)$, se tiene entonces, aplicando la fórmula de distancia, que:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_I - x_1)^2 + (y_I - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 + \lambda_H A - x_1)^2 + (y_1 + \lambda_H B - y_1)^2} \\ &= \sqrt{\lambda_H^2 (A^2 + B^2)} = |\lambda_H| \sqrt{A^2 + B^2}, \end{aligned}$$

y como de acuerdo a (5) $|\lambda_H| = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{A^2 + B^2}$, se tiene finalmente que:

$$\begin{aligned} d &= \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{(A^2 + B^2)} \\ &= \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

1. Identifique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. $1000 \in \mathbb{N}$. b. $5.4141... \in \mathbb{Z}$. c. $3.14 \in \mathbb{Q}$. d. $0 \in \mathbb{Z}$.

e. $\frac{3}{5} \in \Re$. f. $-\sqrt{216} \in \mathbb{Z}$. g. $2.141414... \in \mathbb{Q}$. h. $-\frac{5}{6} \notin \mathbb{Q}$. i. $500.1 \notin \mathbb{N}$.

2. Usando los signos $\subset$ (contenido) y $\not\subset$ (no contenido), llene los siguientes espacios en blanco de manera que se obtenga una proposición verdadera:

a. $\mathbb{N}$ __ $\mathbb{Z}$. b. $\mathbb{Q}$ __ $\mathbb{N}$. c. $\mathbb{C}$ __ $\Re$. d. $\mathbb{Z}$ __ $\mathbb{Q}$. e. $\mathbb{Q}$ __ $\Re$.

f. $\Re^+$ __ $\mathbb{N}$. g. $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$ __ $\{0\}$. h. $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$ __ $\mathbb{Z}$. i. $\mathbb{C} \cap \mathbb{N}$ __ $\mathbb{Z}$.

3. Demuestre las siguientes desigualdades:

a. Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.

b. Si $a < b$, entonces $-b < -a$.

c. Si $a > 1$, entonces $a^2 > a$.

d. Si $0 < a < 1$, entonces $a^2 < a$.

e. Si $0 \le a < b$ y $0 \le c < d$, entonces $a \cdot c < b \cdot d$.

f. Si $0 \le a < b$, entonces $a^2 < b^2$ (utilice el literal *e*).

g. Compruebe por medio de ejemplos que si *a*, *b*, *c* y *d* son positivos, y $a > b$ y $c > d$, no necesariamente se sigue que $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

h. Si *a* y *b* son números positivos desiguales $(a > 0,\ b > 0,\ a \ne b)$, demuestre que

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

4. Escriba con notación de conjunto el intervalo(s) resultante de la operación indicada:

a. $[-3,7] \cup [2,6]$. b. $[2,4] \cup [3,10]$. c. $[2,5] \cap (5,8)$.

d. $(-\infty,2] \cup [1,+\infty)$. e. $[2,6] - (3,7]$. f. $[1,5] \cup \{\Re - [3,7]\}$.

5. Dibuje sobre la recta real y escriba con notación de intervalo el resultado de:

a. $\{x \in \Re \mid x < 5\} \cap \{x \in \Re \mid x \le 5\}$.

b. $\{x \in \Re \mid -5 \le x \le 5\} \cap \{x \in \Re \mid -1 < x < 1\}$.

c. $\{x \in \Re \mid -5 < x < 5\} \cap \{x \in \Re \mid -1 \le x \le 8\}$.

d. $\{x \in \Re \mid x < +\infty\} \cup \{x \in \Re \mid -2 \le x\}$.

e. $\{x \in \Re \mid x < 0\} \cup \{x \in \Re \mid -2 \le x \le 10\}$.

6. Si $A = [-3, 3]$, $B = (-3, 3)$, $C = (-1, 4]$, $D = (-4, -3)$, $E = [-1, 4)$, $F = (-4, 3)$, determine:

a. $A \cup E$ b. $A \cap E$ c. $F - E$ d. $E - F$ e. $(F - E) \cap (E - F)$

f. $C \cap (F \cup D)$ g. $D \cup A$ h. $C \cap \{\Re - (F \cup D)\}$ i. $\Re - (F \cap D)$

7. Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes desigualdades (inecuaciones). Exprese el resultado como un intervalo o unión de intervalos:

a. $2x - 4 < x - 8$. b. $3x - 5 \ge 8x + 7$. c. $(x+2)(x-3) < 0$.

d. $(3-x)(2+x) > 0$. e. $-1 < 3x - 5 \le 6$. f. $\dfrac{x+4}{-2} \le \dfrac{3x-8}{3}$.

g. $x^2 - 2x \le 15$. h. $9x^2 \ge 18x + 7$. i. $2x^2 < 9 - 6x$.

j. $(2x-1)(x+2) > (x+3)(x-2)$. k. $-7 \le 1 - 2x \le -1$. l. $x^2 - 16 > 0$.

m. $\dfrac{(x-5)^2}{x-2} < 0$. n. $x < x^2 - 12 \le 4x$. o. $\dfrac{(x-1)(x+4)}{2-x} \le 0$.

p. $\dfrac{(5-x)(x+4)}{(1-x)} \ge 0$. q. $\dfrac{x^2(x-1)}{(4-x)} < 0$. r. $\dfrac{x+3}{x-4} > 1$.

s. $\dfrac{3}{2x-2} \ge \dfrac{1}{2x+1}$.

8. Determine $|x \cdot y \cdot z|$, sabiendo que:

a. $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$. b. $x \ge 0,\ y < 0,\ z < 0$.

c. $x < 0,\ y < 0,\ z < 0$. d. $x \ge 0,\ y < 0,\ z \ge 0$.

9. Resuelva las siguientes ecuaciones con valor absoluto:

a. $|x-2| = 5$. b. $|x-3| = 8$. c. $|x-1| \cdot |x+2| = 3$. d. $\left|\dfrac{7x}{2} - 2\right| = \left|x + \dfrac{3}{5}\right|$.

e. $\left|\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3}\right| = x - \dfrac{1}{5}$. f. $|x-1| \cdot |x+1| = 0$. g. $|x^2 + 5x + 3| = 3$.

10. Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes desigualdades con valor absoluto. Exprese el resultado como un intervalo o unión de intervalos:

a. $|x-2| \le \frac{1}{5}.$ b. $\left|x-\frac{1}{3}\right| \ge \frac{3}{2}.$ c. $\left|\frac{2x}{11}+\frac{3}{17}\right| \le x-2.$

d. $|2x-3| > 4.$ e. $|x-4| \le 3.$ f. $\left|\frac{2x}{3}-1\right| < 2.$

g. $|x-3| \ge 6.$ h. $\left|\frac{x}{2}\right| \ge 3.$ i. $|3x+5| \ge 15.$

j. $|x-5| < |x+1|.$ k. $|x-4| \le 2-x.$ l. $|2x-5| < 2|x|.$

m. $\big||x|-1\big| \ge |x+1|.$ n. $|x^2-2x| \le 1.$ o. $|3x-1| < 2x+5.$

p. $3 < |2x-3| < 5$ q. $0 < |2x-1| < 4$ r. $|x^2+5x+3| \le 3.$

s. $|x^2+5x+3| > 3.$ t. $\left|\frac{3-2x}{2+x}\right| < 4.$

11. Use la desigualdad triangular y el hecho de que $0 < |a| < |b| \Rightarrow \frac{1}{|b|} < \frac{1}{|a|}$ para demostrar la siguiente cadena de desigualdades:

$$\left|\frac{1}{x^2+3}-\frac{1}{|x|+2}\right| \le \frac{1}{x^2+3}+\frac{1}{|x|+2} \le \frac{1}{3}+\frac{1}{2}.$$

12. Demuestre que $\left|\frac{x-2}{x^2+9}\right| \le \frac{|x|+2}{9}$ (use el ejercicio 11).

13. Demuestre que si $|x| \le 2,$ entonces, $\left|\frac{x^2+2x+7}{x^2+1}\right| \le 15.$

14. Detecte el error en la siguiente demostración:

Supongamos que $a > b > 0.$

Entonces, $a > b \Rightarrow a \cdot b > b^2$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow a \cdot b - a^2 > b^2 - a^2\\
&\Rightarrow a(b-a) > (b-a)(b+a)\\
&\Rightarrow \frac{a(b-a)}{(b-a)} > \frac{(b-a)(b+a)}{(b-a)}\\
&\Rightarrow a > b+a\\
&\Rightarrow 0 > b \Leftrightarrow b < 0 \quad \text{(contradicción con la hipótesis).}
\end{aligned}$$

15. Encuentre la longitud y la pendiente de los segmentos de recta que une cada uno de los pares de puntos siguientes:

a. $(3,-2)$ y $(9,6)$. b. $(4,-3)$ y $(-1,9)$.

c. $(8,-4)$ y $(-7,4)$. d. $(5,-8)$ y $(-7,8)$.

16. Demuestre que los puntos $A(6,1)$, $B(1,7)$ y $C(-4,1)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

17. Demuestre lo mismo del ejercicio 16, pero con los puntos $A(8,9)$, $B(-6,1)$ y $C(0,-5)$.

18. Dado el cuadrilátero cuyos vértices son $P_1(-7,7)$, $P_2(2,0)$, $P_3(10,3)$ y $P_4(1,10)$, encuentre la longitud de sus cuatro lados y demuestre que es un paralelogramo.

19. Demuestre que los puntos $P_1(0,5)$, $P_2(6,-3)$ y $P_3(3,6)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. Halle su área.

20. Si la pendiente de la recta que une los puntos:

a. $A(x_1,-1)$ y $B(2,5)$ es 3, determine x_1.

b. $A(6,-1)$, y $B(10,y_1)$ es $\frac{2}{3}$, determine y_1.

21. Los vértices de un triángulo son los puntos $A(3,5)$, $B(-5,1)$ y $C(1,7)$.

a. Localice los puntos medios de los lados.
b. Localice el punto de intersección de las medianas.
c. Demuestre que el segmento que une los puntos medios de cualquier par de lados es paralelo al tercer lado y es la mitad de su longitud.

22. Tres vértices de un paralelogramo son los puntos $A(1,-2)$, $B(7,\ 3)$ y $C(-2,\ 2)$. Encuentre el cuarto vértice.

23. Localice el punto P, el cual divide el segmento de recta que une los puntos $P_1(-4,2)$ y $P_2(6,7)$ en tal forma que $\frac{\overline{P_1P}}{\overline{P_1P_2}}=\frac{1}{5}$.

24. Localice los vértices de un triángulo sabiendo que los puntos medios de los lados son los puntos $(-2,4)$, $(-1,3)$ y $(2,6)$.

25. Demuestre que las medianas de un triángulo se cortan en un solo punto que está a los 2/3 de sus respectivos vértices.

26. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son los puntos:

a. $O(0,0)$, $A(9,2)$ y $B(1,4)$, es rectángulo.

b. $A(8,-1)$, $B(-6,1)$ y $C(2,-7)$, es rectángulo.

27. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 3) y cuya pendiente es 2.

28. Encuentre la ecuación de la recta que pasando por el punto $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ tiene pendiente infinita.

29. Encuentre la ecuación de la recta que pasando por el punto de intersección de $6x-2y+8=0$ con $4x-6y+3=0$ sea perpendicular a $5x+2y+6=0.$

30. La base de un triángulo está formada por la recta que une los puntos $(-3,1)$ y $(5,-1)$. ¿Cuál es la distancia del tercer vértice (6, 5) a la base?

31. Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de $l_1: x+4y-8=0$ y $l_2: 3x-2y-10=0$ y dista del punto $P(0, 1)$ una longitud igual a $2\sqrt{2}$ unidades.

32. Sean $P_0(x_0,y_0)$, $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ tres puntos no colineales. Demuestre que el área del triángulo de vértices P_0, P_1 y P_2 viene dada por el determinante:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

33. Encuentre las áreas de los triángulos cuyos vértices son:

a. $(0,0)$, $(2,4)$ y $(-1,6)$.

b. $(-2,-1)$, $(-4,-6)$ y $(-1,-3)$.

c. $(3,4)$, $(-2,1)$ y $(1,-5)$.

d. $(3,6)$, $(-2,7)$ y $(-1,-2)$.

34. Encuentre la distancia del punto $P(6, 1)$ a la recta de ecuación $5x+12y-31=0.$ Ilustre la situación gráficamente.

35. Encuentre la ecuación de la recta l que pasa por el punto $P(17, 12)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $5x+12y-60=0.$ Determine además las coordenadas del punto de intersección de estas líneas y halle la distancia de P a l de dos maneras diferentes.

36. Considere el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(0,0)$, $B(0,3)$ y $C(1,2)$.

a. Encuentre las ecuaciones de las medianas.
b. Encuentre las ecuaciones de las alturas.
c. Encuentre las ecuaciones de las mediatrices.
d. Localice el baricentro, el ortocentro y el incentro del triángulo.

37. Determine en cada uno de los siguientes casos la ecuación de la recta que cumple las condiciones dadas:

a. Pasa por el punto de intersección de las rectas $2x-3y+7=0$ y $x+y-7=0$ y contiene el origen.

b. Pasa por la intersección de $x-y+6=0$ con $2x+y=0$ y tiene intercepto 2 con el eje y.

c. Pasa por la intersección de $5x-2y=0$ con $x-2y+8=0$ y corta el primer cuadrante determinando un triángulo de área 36.

d. Pasa por el punto de intersección de $y-10=0$ con $2x-y=0$ y dista 5 unidades del origen.

38. Para cada una de las funciones de los literales *a-f* determine $f(a)$, $f(a+h)$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Simplifique el resultado.

a. $f(x)=x^2$. b. $f(x)=\sqrt{x}$. c. $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

d. $f(x)=\sqrt[3]{x}$. e. $f(x)=x^2-5x+8$. f. $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{3}$.

39. Para cada una de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ dadas en los literales *a-f*, determine lo siguiente:

$$(f+g)(x),\ (f\cdot g)(x),\ \left(\frac{f}{g}\right)(x),\ (f\circ g)(x) \text{ y } (g\circ f)(x).$$

Especifique también el dominio de la función resultante.

a. $f(x)=x^2+3,\quad g(x)=x^2-4.$

b. $f(x)=x^3,\quad g(x)=2x^2.$

c. $f(x)=x^3,\quad g(x)=x^4-1.$

d. $f(x)=3x+5,\quad g(x)=7x-2.$

e. $f(x)=\sqrt{x+4},\quad g(x)=\sqrt{5-x}.$

f. $f(x)=1-x^2,\quad g(x)=[\![x]\!].$

40. Para cada una de las funciones de los literales *a-h* elabore la gráfica usando técnicas de desplazamiento, compresión y alargamiento (inicie con la función apropiada en cada caso).

a. $g(x)=x^2-1.$ b. $h(x)=x^3+1.$ c. $t(x)=\sqrt{x-2}.$ d. $p(x)=\dfrac{-1}{x}.$

e. $m(x)=(x+1)^2-3.$ f. $g(x)=2|1-x|.$ g. $h(x)=2[\![x-1]\!].$ h. $r(x)=\dfrac{1}{2x}.$

41. En los literales *a - c* se da la gráfica de una función *f*. Úsela como un primer paso para elaborar la gráfica de las siguientes funciones (figura 14):

$$F(x)=f(x)+3;\qquad G(x)=f(x+2);\qquad T(x)=\frac{1}{2}f(x).$$

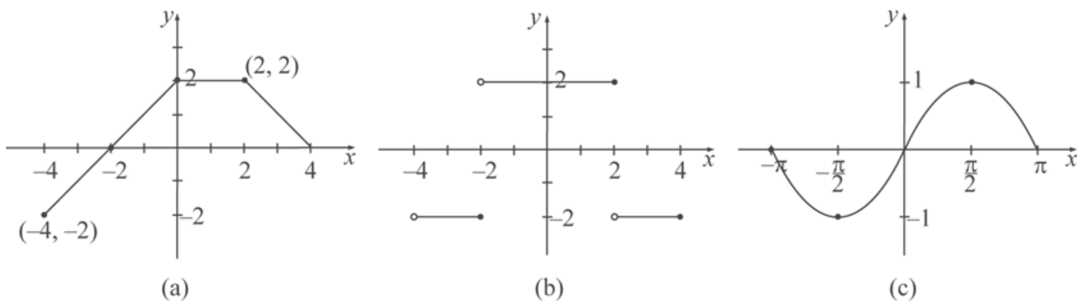


Figura 14

42. Sea $f(x)=\dfrac{mx+n}{px+q}$. Determine $f^{-1}(x)$ si $p\neq 0$. ¿Qué condiciones cumplen p, q, m y n para que $f = f^{-1}$?

43. Sin graficar analice cuáles de las siguientes funciones son pares, impares o ninguno de los dos casos anteriores:

a. $f(x)=x^3+x$. b. $g(x)=x^3-x$. c. $h(x)=3x^2-x^4$.

d. $t(x)=x^5-3$. e. $f(x)=\operatorname{sen} x$. f. $h(x)=\cos 2x$.

g. $t(x)=\tan x,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

44. Demuestre que si f y g son funciones impares, entonces $(f\circ g)$ también es impar.

45. Demuestre que si f es una función impar y g es una función par, entonces $(f\circ g)$ y $(g\circ f)$ son impares.

46. Un alambre de 100 cm de longitud se corta a una distancia x de sus extremos. Con una de las partes se forma un círculo y con la otra un cuadrado. Exprese en función de x la suma de las áreas de las dos figuras resultantes.

47. Se dispone de una cartulina cuadrada de lado a y se quiere hacer una caja recortando cuadrados de lado x en cada una de las esquinas y doblando sus lados. Exprese en función de x el volumen de la caja resultante.

48. Tres cuadrados grandes de metal, cada uno de 100 cm de lado, tienen recortados de sus esquinas cuatro pequeños cuadrados de lado x. Los doce pequeños cuadrados resultantes deben ser del mismo tamaño. Las tres piezas grandes en forma de cruz se doblan y se sueldan para formar cajas sin tapa y los doce cuadrados pequeños se usan para formar dos cubos pequeños. Exprese en función de x el volumen total de las cinco cajas resultantes.

49. Un granjero quiere cercar un terrero rectangular de área 2.400 pies^2. También quiere utilizar algo de cerca para construir una división interna paralela a dos de las secciones del borde. Exprese en función del lado la longitud total de cerca que necesita para dicho propósito.

50. Un abrevadero que está lleno de agua tiene 2 m de longitud y sus extremos tienen la forma de triángulos equiláteros invertidos de 60 cm de lado. Si el agua se escapa por un orificio del fondo del abrevadero a una razón dada, exprese como una función el volumen de agua del abrevadero en cualquier instante.